Math. P.
109

Digitized by Google

Math P
109d
Dresdenweg

Digitized by Google

Zur geometrischen Analysis.

Vorwort, Lehrsätze und Aufgaben

von

Dr. W. A. Diesterweg,

ordentl. Professor der Mathematik an der Königl. Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität.

Mit zwey Steintafeln.

Bonn,

in Commission bey Eduard Weber.

1834.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

Vorwort

über

geometrische Analysis.

Digitized by Google

Digitized by Google

Analysis.

Analysis und Synthesis sind die beiden großen Gegensätze, welche man im ganzen Gebiete der Mathematik, in der Geometrie, wie in dem Calcul, findet. In ihrem Gegensatze beruhet der wahre Unterschied zwischen der Arithmetik und der Algebra, wovon jene das Unbekannte auf synthetischem, diese auf analytischem Wege suchet, derselbe Unterschied, welcher sich zwischen synthetischer Geometrie und geometrischer Analysis findet. Sie sind die entgegengesetzten Wege, deren sich der Mathematiker, des einen zur Erforschung, des anderen zum Beweise der Wahrheit, bedient.

Auf dem einen Wege fragt er, wovon hangt das, was man sucht, ab, durch was wird dasselbe bedingt, was muß vorher bewiesen, oder gethan werden, ehe man das, was bewiesen, oder gethan werden soll, beweisen, oder thun kann? Wird nach der Wahrheit eines Satzes d gefragt, oder die Construction irgend eines Objektes d verlangt, so fragt der Analytiker nach einem Satze, oder

Digitized by Google

Objecte c, wovon d abhange, nach dem Satze, oder Objekte b, wovon c abhängig sey, und sofort, bis er zu einem Satze a, welcher bekannt ist, oder einem Objekte a, welches dargelegt werden kann, gelangt. Er ist der Weg, welchen die Alten gingen, wenn sie die Auflösung einer Aufgabe, oder den Beweis eines Lehrsatzes suchten, und sie führten die Analysis so weit zurück, bis sie auf solche Aufgaben oder Sätze gelangten, welche in den Elementen als auflösbar dargestellt, oder bewiesen werden.

Auf dem anderen Wege gehet man von dem Bekannten aus, reihet Bekanntes an Bekanntes, verbindet das eine mit dem anderen, und leitet nach unbezweifelbaren Regeln neue Wahrheiten daraus her. Derselbe ist der Weg, welchen Euclides in seinen Elementen ging. Er ist zwingend, und gestattet keinen Zweifel an der Wahrheit des Hergeleiteten. Aber er läßt doch einen Mangel an Befriedigung zurück. Den Denkenden befriedigt es nicht, zu erkennen, daß, durch Aneinanderreihen dieser oder jener Sätze, dieser oder jener Satz gefunden, diese oder jene Aufgabe aufgelöst werde, zu erfahren, was andere gedacht haben, und dieses nach zu denken. Er will wissen, wie man erforsche, daß das Zusammenstellen dieser und jener Sätze gerade in dieser und jener Ordnung zur Erkenntniß jener neuen Wahrheit nothwendig sey, er will eigene Ansichten nehmen, die Beweise von Sätzen selbst finden, sich von der Unrichtigkeit anderer Sätze durch eigenes Nachdenken überzeugen, selbstständig Aufgaben auflösen lernen u. s. w. Er verlangt nach dem Wege der Erfindung, nach der Analysis.

Digitized by Google

Bei den Griechen war die Analysis hoch geehrt, und ihr Ursprung wird gerne auf Plato zurück geführt. Pappus führt in seinen Collectionibus mathematicis eine ganze Reihe analytischer Schriften der Alten auf, unter welchen die Schriften des Apollonius von Perga vor allen anderen glänzen. Leider sind sie zum Theil verlohren gegangen. Doch sind mehrere derselben durch den Fleiß späterer Geometer wieder hergestellt worden.

Zu den wichtigsten der auf die Nachwelt gekommenen, oder wieder hergestellten Schriften der Griechen, welche zum Studium der geometrischen Analysis vorzüglich brauchbar, oder nach der geometrisch-analytischen Methode abgefaßt sind, gehören:

1) Die Data des Euclides. Dieselben sind zwar synthetisch abgefaßt, aber sie enthalten eine geordnete Zusammenstellung von Lehrsätzen, welche dasjenige darlegen, was mit gewissen gegebenen geometrischen Objekten gegeben sey, oder aus denselben hergeleitet werden könne, und leisten deßhalb bey der Auflösung geometrischer Aufgaben die wesentlichsten Dienste. Die „geometrischen Aufgaben des Verfassers der vorliegenden Schrift, welche in zwey Sammlungen, Berlin 1825, und Elberfeld 1828, erschienen sind, so wie seine Beiträge zu der Lehre von den positiven und negativen Größen, Bonn 1831", liefern davon viele Beweise. Die Data sind von Neuem herausgegeben worden von J. Fr. Wurm, Berlin 1825.

2) Die ebenen Oerter des Apollonius von Perga. Man sagt, eine Linie sey der Ort eines Punktes, wenn

Digitized by Google

jedem Punkte dieser Linie eine gewisse Eigenschaft zukommt, diese Eigenschaft aber auch keinem Punkte außerhalb derselben zugeschrieben werden kann. Bey der Auflösung geometrischer Aufgaben ist es oft von der höchsten Wichtigkeit, solche Oerter aufzusuchen, und ein Punkt kann als gefunden angesehen werden, wenn zwey Oerter für denselben angegeben werden können. Apollonius, dieser Meister in der analytischen Kunst, legte in jener Schrift einen reichen Schatz von Lehrsätzen über die Oerter nieder. Leider ging dieselbe verlohren. Dem Scharfsinne des großen schottischen Geometers, Robert Simson, verdankt man eine sehr glückliche Wiederherstellung, von welcher Joh. Wilh. Camerer eine deutsche bereicherte Ausgabe geliefert hat, Leipzig 1796.

3) Die Bücher des Apollonius von Perga de sectione determinata. In denselben werden Punkte einer geraden Linie, in welcher andere Punkte gegeben sind, so bestimmt, daß die Quadrate, oder Rechtecke, aus einigen durch die gegebenen und die gesuchten Punkte bestimmten Segmenten, oder aus gegebenen Linien und diesen Segmenten, zu den Quadraten, oder Rechtecken aus den übrigen Segmenten gegebene Verhältnisse haben. Der Verfasser d. kennt keine Schrift, auf welche sich mehr geometrische Aufgaben der mannichfaltigsten Art reduciren lassen, als auf die Aufgaben dieser Schrift. Dieselben sind überdieß in geometrisch-analytischer Methode behandelt, und die Schrift muß als eine Musterschrift für solche Behandlung von Aufgaben gelten. Auch ist sie in einer wissenschaftlichen Ordnung und systematischen

Digitized by Google

Vollständigkeit behandelt, wie die mathematische Literatur alter und neuer Zeit wenige Schriften aufzuweisen hat. Sie war verlohren. Dem oben genannten Schotten, R. Simson, verdankt man eine musterhafte Wiederherstellung, welche der Verfasser d. in einer deutschen freien Bearbeitung im Jahr 1822 zu Mainz herausgegeben hat.

4) Die Bücher des Apollonius von Perga de sectione rationis. Auch diese Schrift war lange verlohren. Glücklicherweise fand sich endlich eine arabische Uebersetzung, welche in dem berühmten Oxforder Gelehrten, W. Halley, i. J. 1706 einen Uebersetzer erhielt. Sie enthält eine Behandlung folgender Aufgabe: von einem gegebenen Punkte eine gerade Linie zu ziehen, daß die, zwischen ihren Durchschnittspunkten mit zwey gegebenen geraden Linien und zweyen in denselben gegebenen Punkten liegenden, Segmente ein gegebenes Verhältniß zu einander haben; und ist eine der Musterschriften, welche ihrem Verfasser wegen ihrer classischen analytisch-geometrischen Behandlung den Namen des großen Geometers erwarben. Eine freye deutsche Bearbeitung lieferte der Verf. d. Berlin 1824.

5) Die Bücher des Apollonius von Perga de sectione spatii. Eine der vorhergehenden parallel laufende Schrift über die Aufgabe: von einem gegebenen Punkte eine gerade Linie durch zwey gegebene gerade Linien zu ziehen, daß die, zwischen den Durchschnittspunkten und zwey in diesen Linien gegebenen Punkten liegenden, Segmente ein der Größe nach gegebenes Rectangel einschließen. Auch sie ist verloren gegangen. Sie fand in den neue-

Digitized by Google

ren Zeiten zwey Wiederherstellungen, die eine von dem Verf. d., Elberfeld 1827, die andere von A. Richter, Halberstadt 1828.

6) Die Bücher des Apollonius von Perga de inclinationibus, welche gleichfalls verloren gegangen waren. Sie beschäftigten sich mit der Behandlung der Aufgabe: von einem gegebenen Punkte aus, durch zwey andere Linien, eine gerade Linie zu legen, daß das zwischen diese Linien fallende Segment eine gegebene Größe habe. Sie wurde von zwey Geometern, Burrow und Horsley, wieder hergestellt. Die vorzüglichere Wiederherstellung wurde im Jahr 1823 von dem Verf. d. dem deutschen Publikum in einer freyen Bearbeitung vorgelegt.

Die Analysis verdiente jene hohe Beehrung, welche sie im Alterthume fand, obgleich sie ihr heut zu Tage nicht von allen Seiten, namentlich nicht von denen, welche die ganze Mathematik in den Calcul setzen, und die Geometrie als etwas Nebengeordnetes geringschätzig behandeln, zu Theil wird. Kommt man in eine Schule, in welcher der geometrische Unterricht nicht blühet, und nicht geliebt wird, so darf man sicher darauf rechnen, daß der Unterricht nicht zweckmäßig ertheilt, namentlich der analytische Gang nicht gehörig befolgt wird. Denn den jugendlichen Geist so höchst anziehend anregenden und beschäftigenden Unterrichte in der Geometrie auf geometrisch-analytischem Wege versagt sich kein talentvoller Schüler. Für den künftigen Lehrer ist darum das Studium der geometrischen Analysis von der äußersten Wichtigkeit.

Digitized by Google

Anweisungen, welche in allen Fällen zum Ziele führen, kann sie freilich nicht geben. Wie lassen sich allgemeine Vorschriften gedenken, alle möglichen geometrischen Aufgaben aufzulösen? Alles, was man darüber gesagt hat und sagen mag, kann nur unbefriedigend seyn. Ernstliches Studium der geometrisch-analytischen Schriften der Alten, und anderer in ihrem Geiste verfaßten, Uebung und eigenes Nachdenken, sind die einzig zu empfehlenden Hülfsmittel.

Construction.

Mit der Analysis eines Lehrsatzes ist der Beweis, weil er nur die umgekehrte Analysis ist, mit der Analysis einer Aufgabe ist die Construction samt dem Beweise gegeben, vorausgesetzt, daß alle Sätze, deren sich die Analysis bediente, umgekehrt werden können. Ist die Analysis, wenn d gemacht werden soll, zu c, b, a aufgestiegen, so vollzieht die Construction alles, was die Analysis als nothwendig nachgewiesen hat, namentlich legt sie a, b, c dar, und erreicht dadurch d.

Uebrigens deutet die Construction durch die Durchschnittspunkte gerader und krummer Linien zwey, oder mehr Auflösungen an, so oft die Aufgabe, algebraisch behandelt, auf eine Gleichung des zweiten, oder eines höheren Grades führt und erreicht dadurch jene Allgemeinheit, welche der Calcul nur darbieten mag. So oft daher ein Punkt durch den Durchschnitt einer geraden Linie und eines

Digitized by Google

Kreises, oder zweier Kreise bestimmt wird, ist der zweite Durchschnitt nicht zu vernachlässigen, sondern die andere Auflösung der vorgelegten Aufgabe, welche der zweite Durchschnitt andeutet, sorgfältig zu bestimmen.

Determination.

Findet sich, daß a, oder b, oder c nur unter gewissen Bedingungen construirt werden können, so folgt, daß auch d nur unter besonderen Bedingungen statt finde. Die Determination hat diese Bedingungen aufzusuchen, namentlich die Verhältnisse der unmittelbar gegebenen Größen, unter welchen d statt finden kann, oder die Grenzen, innerhalb deren sie sich halten müssen, damit d statt finden könne, nachzuweisen. Sie ist der Natur der Sache nach wieder analytisch. Findet sie nämlich, daß a, oder b, oder c nur unter gewissen Voraussetzungen construirt werden könne, so forscht sie nach den Verhältnissen oder Grenzen der unmittelbar gegebenen Größen, welche durch jene Voraussetzungen bedingt werden, von welcher also die Erfüllung derselben abhangt.

Die Alten bedienten sich bey diesen Erforschungen nur der Geometrie, nicht der Trigonometrie, weil sie diese nicht kannten. Sie stellten gegebene Verhältnisse durch Linien, oder Flächenräume dar. Was hindert uns, dieselben durch Zahlen auszudrücken, wenn das größere Bequemlichkeit und größere Genauigkeit gewährt? Würde

Digitized by Google

es nicht eine abgöttische Verehrung der Alten verrathen, wenn man ein bequemeres Hülfsmittel zur Behandlung geometrischer Aufgaben blos darum verschmähen wollte, weil sie sich dessen nicht bedienten, und blos darum nicht bedienten, weil sie es nicht kannten. Man hört ja noch nicht auf, sich auf geometrischem Boden zu bewegen, wenn man sich der Proportionen bedient. Auch diese gehören zur Geometrie.

Die Determination pflegte von den Alten vor der Construction und unabhängig von derselben gesucht zu werden. Da sie aus der Construction gewöhnlich leichter gefunden wird, und eine aus dieser hergeleitete dem Beweise leichter angeschlossen werden kann, als eine unabhängig von derselben gefundene, so erscheint es nicht minder angemessen, sie aus der Construction zu deduciren. Auch hat für den, welcher die Sache scharf ins Auge faßt, die Logik nichts dagegen zu erinnern. Es fragt sich aber, ob eine auf diesem Wege gefundene Determination eine allgemeine Gültigkeit habe, namentlich für alle möglichen Constructionen derselben Aufgabe statt finde. Die Frage wird von einigen Mathematikern verneint, von anderen bejaht. Durch Folgendes dürfte es außer Zweifel gesetzt werden, daß sie bejahet werden müsse.

Man setze, eine Analysis einer Aufgabe thue dar, daß, wenn d ist, auch c, wenn c ist, auch b, und wenn b ist, auch a sey, es zeige sich aber in der Construction, daß a nur unter gewissen Beschränkungen werden könne,

Digitized by Google

so folgt daraus, daß auch d nur unter gewissen, in der Determination festzustellenden, Verhältnissen der unmittelbar gegebenen Bestimmungsstücke, sie seyen m, n, der Aufgabe statt finden könne, es sey, wenn $m > n$ wäre.

Thut man nun durch eine andere Analysis derselben Aufgabe dar, daß, wenn d ist, auch γ, β, α seyen, und zeigt sich in der Construction, daß α nur unter gewissen Beschränkungen, daß also auch d nur unter gewissen, in der Determination festzustellenden, Verhältnissen der unmittelbar gegebenen Bestimmungsstücke m, n der Aufgabe werden könne, und wollte man annehmen, daß diese Verhältnisse nicht mit den aus der ersten Construction hergeleiteten identisch seyen, daß etwa $m \lessgtr n$ seyn müsse, so würde man annehmen müssen, daß d, folglich auch a, unter der Bedingung, daß $m \lessgtr n$ sey, statt finden könne, unter welcher es nach dem vorher Gesagten nicht statt finden kann.

Neuere Schriftsteller legen auf die Determination nicht den gehörigen Werth. Entweder erwähnen sie ihrer gar nicht, oder sie führen sie nicht zu Ende, oder sie reden von ihr erst hinter dem Beweise. Das erste ist ein grobes Versehen, weil sie im Beweise die Realität der Construction voraussetzen, welche erst durch die Determination bedingt wird. Das zweite ist etwas Mangelhaftes, weil die Determination es ist, welche die Verhältnisse der gegebenen Stücke festzustellen hat, unter welchen die Aufgabe möglich wird; das dritte etwas Ord-

Digitized by Google

nungswidriges, weil der Beweis nur eine problematische Gültigkeit hat, so lange nicht die Determination feststeht, und ohne vorhergegangene Determination in dem Beweise Voraussetzungen gemacht werden, welche erst durch dieselbe ihre Rechtfertigung erhalten.

Beweis.

Der Beweis hat darzuthun, daß der Aufgabe Genüge geschehen sey. Zu dem Ende hat man damit den Anfang zu machen, daß man zeigt, es finden, unter den durch die Determination angegebenen Verhältnissen oder Grenzen der unmittelbar gegebenen Größen, die Objekte a, b, c, welche die Construction darzulegen hat, wirklich statt. Das geschieht auf dem umgekehrten Wege der Determination. Und dann wird auf dem umgekehrten Wege der Analysis gezeigt, daß innerhalb jener Grenzen die Aufgabe wirklich aufgelöst, namentlich d dargelegt worden sey.

Neuere Schriftsteller haben behauptet, der Beweis sey überflüssig, weil er nur die Umkehrung der Analysis — es wäre hinzuzufügen: „und der Determination" — enthalte. Ganz mit Unrecht, weil sich nicht alle mathematische Sätze umkehren lassen, und die Richtigkeit der Umkehrung für jeden einzelnen Satz bewiesen werden muß. Die Algebra bedarf des Beweises nicht, weil sie sich in Behandlung der Gleichungen nur solcher Sätze bedient, welche umgekehrt werden können. In

Digitized by Google

geometrischen Entwickelungen bieten gerade die Aufgaben die meisten Schwierigkeiten dar, in welchen die Analysis auf Sätze führt, welche nicht umgekehrt werden können, und es besonderer Untersuchungen zur Feststellung der Bedingungen bedarf, unter welchen die Umkehrung statt finden könne, welches zu eigenen Determinationen führt.

Digitized by Google

Lehrsätze,

welche sich an die Data des Euclides anschließen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrsatz 1. (Fig. 1.)

Ein Dreieck ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß der Summe der Schenkel zur Grundlinie, und der Winkel der Spitze, oder ein Winkel an der Grundlinie, oder der Unterschied der Winkel an der Grundlinie gegeben ist.

Beweis.

Ist in dem Dreiecke BAC das Verhältniß BA+AC:CB gegeben, so verlängere man BA, AC über A hinaus, beschreibe aus A, als Mittelpunkte, mit AC, als Radius, einen Kreis, welcher die Linien BA, BC und die Verlängerung von BA in F, E, D schneide, mache GA=AB, und ziehe die geraden Linien DC, GB, FC, AE.

Ist nun BAC der gegebene Winkel, so ist BDC=$\frac{1}{2}$BAC, also BDC gegeben, folglich, da BA+AC : GB= DB : BC, das Dreieck BDC der Art nach, mithin der Winkel ABC, somit das Dreieck ABC der Art nach, gegeben.

Ist ABC=DBC der gegebene Winkel, so ist Dreieck DBC der Art nach gegeben, folglich der Winkel BDC, mithin auch BAC=2BDC, somit Dreieck BAC der Art nach, gegeben.

Ist ACB gegeben, so ist, weil BA+AC:CB=GC:CB, Dreieck GBC der Art nach, somit Winkel CGB, mithin auch BAC=2.CGB, demnach Dreieck BAC der Art nach, gegeben.

Digitized by Google

Ist ACB—ABC gegeben, so ist AEC—ABC=BAE, somit BCF=½BAE, folglich auch DCB=R+BCF, mithin Dreieck DBC der Art nach, demnach auch Winkel ABC, und Dreieck ABC der Art nach, gegeben.

Lehrsatz 2. (Fig. 2.)

Ein Dreieck ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß der Differenz der Schenkel zur Grundlinie, und der Winkel der Spitze, oder ein Winkel an der Grundlinie, oder der Unterschied der Winkel an der Grundlinie gegeben ist.

Beweis.

Ist in dem Dreiecke BAC das Verhältniß BA—AC : CB gegeben, so schneide man von BA die Linie DA=AC ab, trage auf AC die Linie EA=AB, und ziehe die geraden Linien CD, BE.

Ist nun BAC der gegebene Winkel, so ist BDC=R+½BAC, also gegeben, folglich ist △ BDC der Art nach, mithin Winkel ABC, somit △ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ABC gegeben, so ist △ BDC der Art nach, also Winkel BDC, folglich BAC=2(BDC—R), mithin △ BAC der Art nach, gegeben.

Ist ACB gegeben, so ist BCE, folglich △ BCE der Art nach, mithin BEC, somit BAC=2(R—E), demnach △ BAC der Art nach, gegeben.

Ist ACB—ABC gegeben, so ist 2DCB=ACB—ABC gegeben, also DCB, somit △ DCB der Art nach, folglich ABC, demnach auch ACB, also △ ABC der Art nach, gegeben.

Digitized by Google

Lehrsatz 3. (Fig. 3.)

Wenn in einem Dreiecke, dessen Winkel an der Grundlinie spitz sind, das Verhältniß der Summe der Schenkel zu dem Unterschiede der, durch das Perpendikel von der Spitze auf die Grundlinie gebildeten, Segmente der Grundlinie, und der Winkel der Spitze, oder ein Winkel an der Grundlinie, oder der Unterschied der Winkel an der Grundlinie gegeben ist, so ist das Dreieck der Art nach gegeben.

Beweis.

Ist in dem Dreiecke BAC das Verhältniß BA+AC: BD—DC, wenn AD ein Perpendikel auf die Grundlinie ist, gegeben, so beschreibe man aus A als Mittelpunkte mit AC, AB als Radien Kreise, welche die Verlängerungen von BA, AC, CB, und die Linie BC in L, G, K, H schneiden, und ziehe die geraden Linien LC, GK.

Ist nun BAC der gegebene Winkel, so ist LAC= 2R—BAC, also gegeben, folglich LC=R—$\frac{1}{2}$BAC gegeben, wenn die gerade Linie LH gezogen wird, mithin BHL=R+$\frac{1}{2}$BAC gegeben, also ist, da BA+AC:BD—DC =LB : BH, △ BHL der Art nach, somit Winkel ABC, und △ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ABC der gegebene Winkel, so ist △ LBH der Art nach, folglich Winkel BHL, LHC=2R—BHL, LAC= 2LHC, BAC=2R—LAC gegeben, somit △ ABC der Art nach gegeben.

Ist ACB gegeben, so ist auch GCK=2R—ACB gegeben. Da GC=CA+AB, KC=BD—DC, so ist GC:CK, somit △ GCK der Art nach, also Winkel GKC,

Digitized by Google

folglich GAB=2GKC, mithin BAC=2R—GAB, demnach △ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ACB—ABC gegeben, so ist BAH=AHC—ABC =ACB—ABC gegeben, also BLH=½BAH, somit △ BLH der Art nach, folglich Winkel ABC, demnach auch ACB, und △ ABC der Art nach, gegeben.

Lehrsatz 4. (Fig. 4.).

Ein Dreieck, dessen Winkel an der Grundlinie spitz sind, ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß des Unterschiedes den Schenkel zur Differenz der, durch das Perpendikel von der Spitze auf die Grundlinie gebildeten, Segmente der Grundlinie, und der Winkel der Spitze, oder ein Winkel an der Grundlinie, oder der Unterschied der Winkel an der Grundlinie gegeben ist.

Beweis.

Ist in dem Dreiecke BAC das Verhältniß BA—AC: BD—DC gegeben, so beschreibe man aus A als Mittelpunkte mit dem kleineren Schenkel AC als Radius einen Kreis, welcher BC in H, BA und ihre Verlängerung in K, L schneide, und ziehe die geraden Linien AH, HK, LC. Ist nun BAC der gegebene Winkel, so ist BLC=½BAC, also BHK=BLC gegeben. Da BA—AC : BD—DC= KB:BH, so ist △ BKH der Art nach, also Winkel ABC, somit △ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ABC gegeben, so ist △ KBH der Art nach, also Winkel BHK, folglich BLC=BHK, mithin BAC=2BLC, somit △ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ACB gegeben, so beschreibe man aus A als Mit-

Digitized by Google

telpunkte mit dem größeren Schenkel AB als Radius einen Kreis, welcher den verlängerten Linien AC, BC in G, E begegne, und ziehe die gerade Linie GE, so ist GC : CE=BA—AC : BD—DC. Da ECG=ACB, so ist △ CGE der Art nach, also Winkel CEG, folglich BAC= 2CEG, mithin △ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ACB—ABC gegeben, so ist, wenn die gerade Linie AE gezogen wird, CAE=ACB—ABC, also CGE= R—½CAE, folglich △ CGE der Art nach, mithin Winkel GCE, somit ACB=GEC, und ABC, mithin △ ABC der Art nach, gegeben.

Lehrsatz 5. (Fig. 5.)

Ein Dreieck, welches an der Grundlinie einen stumpfen Winkel hat, ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß der Summe der Schenkel zu der Summe der, durch das Perpendikel von der Spitze auf die verlängerte Grundlinie gebildeten, Segmente, und der Winkel der Spitze, oder ein Winkel an der Grundlinie, oder der Unterschied der Winkel an der Grundlinie gegeben ist.

Beweis.

Ist in dem Dreiecke BAC das Verhältniß BA+AC: BD+DC gegeben, so beschreibe man aus A als Mittelpunkte mit AC als Radius einen Kreis, welcher die Linie BA in K, die Verlängerungen von BA, BC in L, H schneide, und ziehe die geraden Linien KH, HL, so ist BA+AC : BD+DC=LB : BH.

Ist nun BAC der gegebene Winkel, so ist KHC= ½BAC, also BHL=R+KHC, folglich △ BHL der Art

Digitized by Google

nach, mithin Winkel ABC, somit △ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ABC der gegebene Winkel, so ist △ LBH der Art nach, also Winkel BHL, folglich BHK=BHL —R, mithin BAC=2BHK, somit △ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ACB gegeben, so beschreibe man aus A als Mittelpunkte mit AB als Radius einen Kreis, welcher der verlängerten CA in G, der verlängerten BD in E begegne, und ziehe die gerade Linie GE, so ist BA+AC: BD+DC=GC : CE. Da ACB gegeben ist, so ist GCE= 2R—ACB, also △ GCE der Art nach, folglich Winkel GEC, mithin GAB=2GEC, somit BAC=2R—GAB, demnach △ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ACB—ABC gegeben, so ist $\left.\begin{matrix} ACB-AEC \\ EAC \end{matrix}\right\}$=ACB— ABC, wenn die gerade Linie AE gezogen wird, also ist EAC, folglich CGE=$\frac{1}{2}$EAC, mithin △ EGC der Art nach, somit Winkel ACB, demnach auch ABC, also △ ABC der Art nach, gegeben.

Lehrsatz 6. (Fig. 6.)

Ein Dreieck, welches an der Grundlinie einen stumpfen Winkel hat, ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß des Unterschiedes der Schenkel zu der Summe der, durch das Perpendikel von der Spitze auf die verlängerte Grundlinie gebildeten, Segmente, und der Winkel der Spitze, oder ein Winkel an der Grundlinie, oder der Unterschied der Winkel an der Grundlinie gegeben ist.

Digitized by Google

Beweis.

Ist in dem Dreiecke BAC das Verhältniß BA—AC: BD+DC gegeben, so beschreibe man aus A als Mittelpunkte mit AC als Radius einen Kreis, welcher die Linie BA in K, die BC in H schneide, und ziehe die Linie KH.

Ist BAC der gegebene Winkel, so ist $BHK=\frac{1}{2}BAC$, also, da BA—AC : BD+DC=KB : BH, $\triangle$ BHK der Art nach, folglich Winkel ABC, somit $\triangle$ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ABC der gegebene Winkel, so ist $\triangle$ KBH der Art nach, also Winkel KHB, somit BAC=2KHB, mithin $\triangle$ ABC der Art nach, gegeben.

Ist ACB gegeben, so beschreibe man aus A als Mittelpunkte mit AB als Radius einen Kreis, welcher die verlängerten AC, CB in G, E schneide, und ziehe die geraden Linien GE, AE. Nun ist GC : CE=BA—AC : BD+DC, also $\triangle$ GCE der Art nach, folglich Winkel CEG, mithin BAC=2CEG, somit $\triangle$ BAC der Art nach, gegeben.

Ist ACB—ABC gegeben, so ist ACB-ABC=ACB-AEC =GAE,

also GAE, folglich $CEG=R-\frac{1}{2}GAE$, mithin $\triangle$ CGE der Art nach, somit Winkel GCE, also ACB, und mit demselben ABC, folglich $\triangle$ ABC der Art nach, gegeben.

Lehrsatz 7. (Fig. 7.)

Ein Dreieck ist der Art nach gegeben, wenn seine Seiten arithmetisch proportionirt sind, und ein Winkel, oder der Unterschied zweyer Winkel gegeben ist.

Digitized by Google

Beweis.

Da die Seiten arithmetisch proportionirt sind, so ist das Verhältniß der Summe zweyer Seiten zur dritten Seite gegeben, nämlich $=2:1$. Ist also ein Winkel, oder der Unterschied zweyer Winkel gegeben, so ist das Dreieck der Art nach gegeben.

Zusatz. (Fig. 7.)

Ist ein solches Dreieck rechtwinkelig, so verhalten sich die Seiten, wie die Zahlen 3, 4, 5.

Beweis.

Es ist $BC^2 - CA^2 \} = AB^2$.
$(BC+CA)\ (BC-CA) \}$

Da $CB - BA = BA - AC$

so ist $BC + CA = 2AB$

folglich $2AB(BC-CA) = AB^2$

mithin $BC - CA = \frac{1}{2}AB$

demnach $BC+CA-(BC-CA) \} = 2AB - \frac{1}{2}AB$
$2CA \qquad\qquad\quad \} = \frac{3}{2}AB$

somit $BA : AC = 4 : 3$

also $BA^2 : AC^2 = 16 : 9$

folglich $BA^2 + AC^2 \} : AB^2 = 25 : 16$
$BC^2 \quad\ \}$

mithin $CB : BA = 5 : 4$

somit $CB : BA : AC = 5 : 4 : 3$.

Digitized by Google

Lehrsatz 8. (Fig. 8. a. b.)

Ein rechtwinkeliges Dreieck ist der Art nach gegeben, wenn seine Seiten geometrisch proportionirt sind.

Beweis.

Ist $CB : BA = BA : AC$

so ist $CB^2 : \left\{\begin{matrix} BA^2 \\ CB.BD \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} BA^2 \\ CB.BD \end{matrix}\right. : \begin{matrix} AC^2 \\ BC.CD \end{matrix}$, wenn $ADB = R$ (Fig. a.), $CAD = R$ (Fig. b.).

also $CB : BD = BD : DC$.

Zieht man $EG \# BC$, und verlängert AD bis zum Durchschnitte mit derselben in F, so ist $GE : EF = EF : FG$. Nimmt man GE einer gegebenen geraden Linie gleich, so läßt sich der Punkt F nach El. II. 11. finden, also ist

$$\left.\begin{matrix} EF : FG \\ BD : DC \\ BA^2 : AC^2 \end{matrix}\right\}$$

folglich auch $BA : AC$, somit $\triangle ABC$ der Art nach, gegeben.

Zusatz.

Es verhält sich $EF : FG = -1 + \sqrt{5} : 3 - \sqrt{5}$.

Lehrsatz 9. (Fig. 9.) (cf. Data 66.)

Wenn ein Winkel BAC eines Dreieckes BAC gegeben ist, so ist das Verhältniß des Rechteckes der einschließenden Seiten BA, AC zu dem Inhalte des Dreieckes gegeben.

Digitized by Google

Beweis.

Fällt man von dem Endpunkte C einer der einschließenden Seiten ein Perpendikel CD auf die andere, oder ihre Verlängerung, so ist

$$BA.AC : \triangle ABC = BA.AC : \frac{BA.CD}{2}$$
$$= 2AC : CD.$$

Da der Winkel BAC gegeben, und ADC=R ist, so ist △ ADC der Art nach, folglich das Verhältniß AC : CD, mithin auch das Verhältniß 2AC : CD, somit das Verhältniß BA.AC : △ABC gegeben.

Zusatz 1.

Es ist BA.AC : △ABC = 2 : sin BAC.

Zusatz 2.

Durch diesen Satz können zunächst folgende Aufgaben aufgelößt werden: ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben seyen

a) der Winkel der Spitze,

α) das Rechteck der einschließenden Seiten, und

1) die Grundlinie,
2) die Höhe,
3) das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe,
4) die Summe } der Grundlinie und Höhe,
5) Differenz }
6) die Summe } der Quadrate der Grundli-
7) Differenz } nie und Höhe.

β) Der Flächenraum, und

1) eine der den Winkel der Spitze einschließenden Seiten,

Digitized by Google

2) das Verhältniß dieser Seiten,
3) die { Summe } derselben,
4) { Differenz }
5) die { Summe } der Quadrate derselben,
6) { Differenz }

b) das Rechteck der den Winkel der Spitze einschließenden Seiten,
1) der Flächenraum, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie,
2) die Grundlinie, und die Höhe;
c) der Flächenraum, und die den Winkel der Spitze einschließenden Seiten.

Lehrsatz 10. (Fig. 10.) (Dat. 64. 65.)

Wenn in einem Dreiecke ein Winkel gegeben ist, so hat der Unterschied der Summe der Quadrate der einschließenden Seiten und des Quadrates der Grundlinie zu dem Inhalte des Dreieckes ein gegebenes Verhältniß.

Beweis.

1) Ist der gegebene Winkel ABC < R, so ist, wenn von dem Endpunkte A der einen der einschließenden Seiten ein Perpendikel AD auf die andere gefällt wird,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2CB.BD$$

$$\text{also } 2CB.BD = AB^2 + BC^2 - AC^2$$

$$\text{folglich } AB^2 + BC^2 - AC^2 : \triangle ABC = 2CB.BD : \frac{BC.AD}{2}$$

$$= 4BD : DA.$$

Da Winkel ABD gegeben, auch ADB = R ist, so ist $\triangle$ ABD

Digitized by Google

der Art nach, also das Verhältniß BD : DA, folglich auch das Verhältniß 4BD : DA, somit das Verhältniß $AB^2+BC^2-CA^2 : \triangle ABC$ gegeben.

2) Ist der gegebene Winkel $ABC>R$, so ist, wenn von dem Endpunkte A einer der einschließenden Seiten ein Perpendikel AD auf die Verlängerung der anderen gefällt wird,

$$AC^2=AB^2+BC^2+2CB.BD$$

$$\text{also } 2CB.BD=AC^2-(AB^2+BC^2)$$

$$\text{folglich } AC^2-(AB^2+BC^2) : \triangle ABC=2CB.BD : \frac{BC.AD}{2}$$

$$=4BD : DA.$$

Da Winkel $ABD(=2R-ABC)$ gegeben, auch $ADB=R$ ist, so ist $\triangle$ ABD der Art nach, also das Verhältniß BD:DA, folglich auch das Verhältniß 4BD:DA, somit $AC^2-(AB^2+BC^2) : \triangle ABC$ gegeben.

Zusatz 1.

Es ist $AB^2+BC^2-AC^2 : \triangle ABC=4 : \tan. ABC$, wenn $ABC<R$;

$AC^2-(AB^2+BC^2) : \triangle ABC=4 : -\tan. ABC$, wenn $ABC>R$.

Zusatz 2.

Mittelst dieses Satzes lassen sich unter anderen folgende Aufgaben leicht auflösen: ein Dreieck zu beschreiben, von welchem, wenn man die Seiten durch a, b, c, die gegenüberliegenden Winkel durch A, B, C, die Höhe durch h bezeichnet, gegeben seyen

α) Winkel A,

Digitized by Google

א) der Unterschied der Summe der Quadrate der einschließenden Seiten und des Quadrates der Grundlinie, und

1) a
2) h
3) a : h
4) a+h
5) a—h
6) a^2+h^2
7) a^2-h^2.

ב) der Flächenraum, und

1) b^2+c^2
2) $b^2+c^2 : a^2$
3) $b^2+c^2+a^2$
4) $b^2-c^2+a^2$
5) $b^2 : a^2-c^2$.

ג) das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe, und

1) b^2+c^2
2) $b^2+c^2+a^2$.

ד) $b^2+c^2 : a^2$, und

1) a+h
2) a—h
3) a^2+h^2
4) a^2-h^2.

β) Der Unterschied der Summe der Quadrate der einschließenden Seiten und des Quadrates der Grundlinie,

א) der Flächenraum, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie,

ב) die Grundlinie, und die Höhe.

Digitized by Google

Lehrsatz 11. (Fig. 9.)

Wenn ein Winkel eines Dreieckes gegeben ist, so hat der Unterschied der Summe der Quadrate der einschließenden Seiten und des Quadrates der Grundlinie zu dem Rechtecke jener Seiten ein gegebenes Verhältniß.

Beweis.

1) Ist der gegebene Winkel $BAC < R$,

so ist $BA^2 + AC^2 - CB^2 : \triangle ABC = 4AD : DC$ (Lehrs. 10.)
$= 2AD : \frac{1}{2}DC$;

Nun ist $\triangle ABC : BA.AC = DC : 2CA$ (Lehrs. 9.)
$= \frac{1}{2}DC : CA$

---

also ist $BA^2 + AC^2 - CB^2 : BA.AC = 2DA : AC$.

2) Ist der gegebene Winkel $BAC > R$,

so ist $BC^2 - (BA^2 + AC^2) : \triangle ABC = 4AD : DC$ (Lehrs. 10.)
$= 2AD : \frac{1}{2}DC$;

Es ist $\triangle ABC : BA.AC = DC : 2CA$
$= \frac{1}{2}DC : CA$

---

also ist $BC^2 - (BA^2 + AC^2) : BA.AC = 2DA : AC$.

Da der Winkel BAC gegeben ist, so ist DAC, folglich $\triangle DAC$ der Art nach, mithin das Verhältniß $2DA:AC$, somit auch das Verhältniß $BA^2 + AC^2 - CB^2 : \triangle ABC$, oder $BC^2 - (BA^2 + AC^2) : BA.AC$ gegeben.

Zusatz 1.

Es ist, wenn $BAC < R$, $BA^2 + AC^2 - CB^3 : \triangle ABC$
$= 2 \cos.BAC : 1$;

und, wenn $BAC > R$, $BC^2 - (BA^2 + AC^2) : \triangle ABC$
$= 2 \cos.DAC : 1$
$= -2 \cos.BAC : 1$.

Digitized by Google

Zusatz 2.

An diesen Satz schließen sich zunächst folgende Aufgaben an: ein Dreieck zu beschreiben, in welchem gegeben seyen

α) der Winkel BAC,

κ) der Unterschied der Summe der Quadrate der einschließenden Seiten, und

1) $b : c$

2) $b+c$

3) $b-c$

4) b^2-c^2;

ב) das Rechteck der den gegebenen Winkel einschließenden Seiten, und

1) a

2) $b^2+c^2 : a^2$

3) $b^2+c^2+a^2$

4) $b^2+a^2-c^2$

5) $b^2 : a^2-c^2$;

ג) das Verhältniß der einschließenden Seiten, und

1) c^2-a^2

2) $b^2+a^2-c^2$.

β) der Unterschied der Summe der Quadrate der einschließenden Seiten und des Quadrates der Grundlinie, das Rechteck jener Seiten, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

Lehrsatz 12. (Fig. 11.) (Dat. 67.)

Wenn ein Winkel BAC eines Dreieckes gegeben ist, so hat der Ueberschuß des Quadrates der Schenkelsumme

Digitized by Google

über das Quadrat der Grundlinie zu dem Inhalte des Dreieckes ein gegebenes Verhältniß.

Beweis.

Nimmt man auf der Verlängerung von BA die Linie DA=AC, zieht die gerade Linie DC, deren Verlängerung von der, der Linie AC parallel laufenden, Linie BE in E geschnitten werde, verbindet A mit E durch die gerade Linie AE, und läßt von B, A die Perpendikel BF, AH auf DE herab, so ist

$$DB : BE = DA : AC$$

$$\text{also } DB \left\{ \begin{matrix} BA + \left\{ \begin{matrix} AD \\ AC \end{matrix} \right. \end{matrix} \right\} = BE$$

$$\text{folglich } (BA+AC)^2 = BE^2$$
$$= BF^2 + \left\{ \begin{matrix} FE^2 \\ EC^2 - 2EC.CF + FC^2 \end{matrix} \right.$$
$$= BC^2 + \left\{ \begin{matrix} EC(EC-2CF) \\ EC.CD \end{matrix} \right.$$

$$\text{mithin } (BA+AC)^2 - BC^2 = EC.CD$$

$$\text{somit } (BA+AC)^2 - BC^2 : \triangle ABC = EC.CD : \left\{ \begin{matrix} \triangle AEC \\ \frac{EC.AH}{2} \end{matrix} \right.$$
$$= 2CD : AH$$
$$= 4DH : HA.$$

Da BAC ein gegebener Winkel ist, so ist auch $ADH = \frac{1}{2}BAC$ gegeben, demnach $\triangle ADH$ der Art nach, folglich das Verhältniß $4DH : HA$, mithin auch das Verhältniß $(BA+AC)^2 - BC^2 : \triangle ABC$ gegeben.

Digitized by Google

Zusatz 1.

Es ist $(BA+AC)^2-BC^2 : \triangle ABC = 4 : \tan.\frac{1}{2}BAC$.

Zusatz 2.

An diesen Satz reihen sich zunächst folgende Aufgaben an: ein Dreieck zu beschreiben, in welchem gegeben seyen

A) Winkel BAC,

α) der Ueberschuß des Quadrates der Schenkelsumme über das Quadrat der Grundlinie, und, wenn die Seiten mit a, b, c, die Höhe mit h bezeichnet werden,

1) h
2) a : h
3) a+h
4) a—h
5) a^2+h^2
6) a^2-h^2.

β) der Flächenraum, und

1) $(b+c)^2+a^2$
2) b+c : a
3) b+c+a
4) b+c—a
5) (b+c)a.
6) b+c.

γ) b+c, und

1) h
2) a : h
3) a+h
4) a—h

Digitized by Google

5) der Radius des in das Dreieck zu beschreibenden Kreises.

δ) b+c+a, und

1) h

2) der Radius des eben genannten Kreises.

ε) b+c—a, und h.

ζ) a : h, und

1) b+c : a

2) (b+c)a

3) $(b+c)^2+a^2$.

η) b+c : a, und

1) a+h

2) a—h

3) a^2+h^2

4) a^2-h^2.

ι) der Radius des in das Dreieck zu beschreibenden Kreises, und

1) $(b+c)^2-a^2$

2) b+c : a

3) a.

B) $(b+c)^2-a^2$,

α) der Flächenraum, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie;

β) a und h.

Lehrsatz 13. (Fig. 11.) (Dat. 67. Zus.)

Wenn ein Winkel eines Dreieckes gegeben ist, so hat der Ueberschuß des Quadrates der Grundlinie über das Quadrat der Schenkeldifferenz zu dem Inhalte des Dreieckes ein gegebenes Verhältniß.

Digitized by Google

Beweis.

Macht man GA=AC, zieht die gerade Linie GC, verlängert dieselbe, bis sie der Verlängerung von EB in K begegnet, fällt auf sie die Perpendikel AH, BL, und verbindet A, K durch die gerade Linie AK,

so ist GB : BK=GA : AC

also KB=BG

=BA—AC

folglich $(BA-AC)^2=BL^2+\begin{cases}LK^2\\KC^2-2KC.CL+LC^2\end{cases}$

$=BC^2-\begin{cases}KC(2LC-CK)\\KC.CG\end{cases}$

mithin $KC.CG=BC^2-(BA-AC)^2$

demnach $BC^2-(BA-AC)^2:\triangle ABC=KC.CG:\begin{cases}\triangle AKC\\KC.AM\end{cases}$

$=2CG : AM$

$=4GM : MA.$

Da der Winkel BAC gegeben ist, so ist GAM($=\frac{1}{2}$BAC) gegeben, also △ GAM der Art nach, folglich das Verhältniß GM : MA, mithin auch das Verhältniß $BC^2-(BA-AC)^2$: △ABC gegeben.

Zusatz 1.

Es ist $BC^2-(BA-AC)^2 : \triangle ABC=4 : \cot.\frac{1}{2}BAC.$

Zusatz 2.

Durch diesen Satz ist die Auflösung folgender nahe liegenden Aufgaben gegeben: ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben seyen

A) Winkel BAC,

α) $a^2-(b-c)^2$, und

1) h
2) a : h
3) a+h
4) a—h
5) a^2+h^2
6) a^2-h^2.

β) der Flächenraum, und

1) $a^2+(b-c)^2$
2) a : b—c
3) a+b—c
4) a—(b—c)
5) a(b—c)
6) b—c.

γ) b—c, und

1) h
2) a : h
3) a+h
4) a—h
5) der Radius des in das Dreieck zu beschreibenden Kreises.

δ) a+b—c, und

1) h
2) der Radius des eben genannten Kreises.

ε) a+c—b, und h.

ζ) a : h, und

1) a : b—c
2) a(b—c)
3) $a^2+(b-c)^2$.

Digitized by Google

η) a : b—c, und
1) a+h
2) a—h
3) a^2+h^2
4) a^2-h^2.

ι) der Radius des in das Dreieck zu beschreibenden Kreises, und
1) $a^2-(b-c)^2$
2) a : b—c
3) a.

B) $a^2-(b-c)^2$,
1) der Flächenraum, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie;
2) a und h.

Lehrsatz 14. (Fig. 11.)

Wenn ein Winkel BAC eines Dreieckes gegeben ist, so hat der Ueberschuß des Quadrates der Schenkelsumme über das Quadrat der gegenüberliegenden Seite zu dem Ueberschusse des Quadrates dieser Seite über das Quadrat der Schenkeldifferenz ein gegebenes Verhältniß.

Beweis.

Es ist $(BA+AC)^2-BC^2 : \triangle ABC = 4DH : HA$
$= 4AM : MG$ (Lehrs. 12.)
$\triangle ABC : BC^2-(BA-AC)^2 = 4AM : MG$ (Lehrs. 13.)

also $(BA+AC)^2-BC^2 : BC^2-(BA-AC)^2 = 16.AM^2 : MG^2$.

Da Winkel BAC, also auch $GAM(=\frac{1}{2}BAC)$ gegeben ist, so ist $\triangle$ AGM der Art nach, also das Verhältniß

Digitized by Google

AM : MG, somit auch das Verhältniß $(BA+AC)^2 — BC^2 : BC^2 — (BA — AC)^2$ gegeben.

Zusatz 1.

Es ist $(BA+AC)^2 - BC^2 : BC^2 - (BA-AC)^2 = 16 : \overline{\tan.\frac{1}{2}BAC}^2$

$$= 1 : \left(\frac{\tan.\frac{1}{2}BAC}{4}\right)^2.$$

Zusatz 2.

Aus diesem Satze ergeben sich zunächst die Auflösungen folgender Aufgaben: ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben seyen

A) Winkel BAC,

α) $(b+c)^2$ a^2, und

1) $a^2+(b-c)^2$

2) $a : b-c$

3) $a(b-c)$

4) $a+b-c$

5) $a-b+c$.

β) $a^2-(b-c)^2$, und

1) $(b+c)^2+a^2$

2) $b+c : a$

3) $(b+c)a$

4) $b+c+a$

5) $b+c-a$.

B) $(b+c)^2-a^2$, $a^2-(b-c)^2$, und der Unterschied der Winkel an der Seite a.

Lehrsatz 15. (Fig. 12.)

Wenn ein Winkel BAC eines Dreieckes gegeben ist, so hat der Ueberschuß des Quadrates der Schenkelsumme

Digitized by Google

über das Quadrat der Gegenseite zu dem Rechtecke der Schenkel ein gegebenes Verhältniß.

Beweis.

Schneidet man auf der Verlängerung von BA die Linie DA=AC ab, zieht die gerade Linie DC, und läßt auf dieselbe das Perpendikel AF herab, so ist

$(BA+AC)^2-BC^2 : \triangle ABC = 4DF : FA$

$= 4AE : EH$, wenn $CEA = R$,

$CAH = HAE$, oder $LAH = HAE$;

$= 4AC : CH$ (El. VI. 3.)

Es ist aber $\triangle ABC : BA.AC = EC : 2CA$

---

also ist $(BA+AC)^2-BC^2 : BA.AC = 2EC : CH$

$= 2(CA \pm AE) : CA.$

Da Winkel BAC gegeben ist, so ist $\triangle EAC$ der Art nach, folglich das Verhältniß EA : AC, mithin auch das Verhältniß $2(CA \pm AE) : AC$, somit das Verhältniß $(BA+AC)^2-BC^2 : BA.AC$ gegeben.

Zusatz 1.

Es ist $(BA+AC)^2-BC^2 : BA.AC = 2(1 \pm \cos. CAE) : 1$

$= 2(1+\cos. BAC) : 1$

$= 4 \cos. \frac{1}{2}BAC^2 : 1.$

Zusatz 2.

Auf diesen Satz lassen sich zunächst die Auflösungen folgender Aufgaben zurückführen: ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben seyen

A) der Winkel BAC,

α) $(b+c)^2-a^2$, und

1) b
2) b : c
3) b—c
4) b^2+c^2
5) b^2-c^2.

β) b.c, und

1) $(b+c)^2+a^2$
2) b+c : a
3) (b+c)a
4) b+c+a
5) b+c—a.

γ) c—a, b.

B) $(b+c)^2-a^2$, b.c, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

Lehrsatz 16. (Fig. 13.).

Wenn ein Dreieck BAC einen gegebenen Winkel BAC hat, so hat der Ueberschuß des Quadrates der Gegenseite über das Quadrat der Schenkeldifferenz zu dem Rechtecke der Schenkel ein gegebenes Verhältniß.

Beweis.

Schneidet man von BA die Linie DA=AC ab, fällt auf die Verbindungslinie CD das Perpendikel AF, auf AB das Perpendikel CE, halbirt den Nebenwinkel des Winkels CAE, wenn BAC<R, den Winkel CAE selbst, wenn BAC>R, durch die gerade Linie AH, welche die

Digitized by Google

Verlängerung von CE, oder die Linie CE selbst, in H schneide, so ist

$$BC^2-(BA-AC)^2 : \triangle ABC = 4DF : FA$$
$$= 4AE : EH$$
$$= 4AC : CH \text{ (El. VI. 3.).}$$

Es ist aber $\triangle ABC : AB.BC = EC : 2CA$
$$= 2EC : 4CA$$

---

also ist $BC^2-(BA-AC)^2 : AB.BC = 2EC : CH$
$$= 2(CA \mp AE) : CA.$$

Da Winkel BAC gegeben ist, so ist $\triangle$ CAE der Art nach, also das Verhältniß CA : AE, folglich auch das Verhältniß $2(CA \mp AE) : CA$, somit das Verhältniß $BC^2-(BA-AC)^2 : AB.BC$ gegeben.

Zusatz 1.

Es ist $BC^2-(BA-AC)^2 : AB.BC = 2(1 \mp \cos. CAE) : 1$
$$= 2(1 - \cos. CAB) : 1$$
$$= 4.\overline{\sin. \tfrac{1}{2}BAC}^2 : 1.$$

Zusatz 2.

Auf diesen Satz reducirt sich die Auflösung folgender Aufgaben: ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben seyen

A) Winkel BAC,

α) $a^2-(b-c)^2$, und

1) b
2) b ; c
3) b+c

Digitized by Google

4) b^2+c^2

5) b^2-c^2.

β) b.c, und

1) $a^2+(b-c)^2$

2) a : b—c

3) a(b—c)

4) a+b—c

5) a+c—b.

γ) a+c, b.

B) $a^2-(b-c)^2$, b.c, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

Lehrsatz 17. (Fig. 9. a. b.)

Wenn ein Winkel BAC eines Dreieckes gegeben ist, so hat der Ueberschuß des Quadrates der Schenkelsumme über das Quadrat der Grundlinie zu dem Unterschiede der Summe der Quadrate der Schenkel und des Quadrates der Grundlinie ein gegebenes Verhältniß.

Beweis.

Es ist $b^2+c^2-a^2 : 2bc = DA : AC$ (Lehrs. 11.) (Fig. a.)

also $\left.\begin{matrix} b^2+c^2+2bc-a^2 \\ (b+c)^2-a^2 \end{matrix}\right\} : b^2+c^2-a^2 = CA+AD : DA$

Eben so ist $a^2-(b^2+c^2) : 2bc = DA : AC$ (Lehrs. 11.) (Fig. b.)

also $\left.\begin{matrix} 2bc-a^2+b^2+c^2 \\ (b+c)^2-a^2 \end{matrix}\right\} : a^2-(b^2+c^2) = CA \pm AD : DA.$

Da Winkel BAC gegeben ist, so ist $\triangle$ ACD der Art nach, folglich das Verhältniß CA : AD, mithin auch das Verhältniß $CA \pm AD : DA$, somit das Verhältniß

$(b+c)^2-a^2 : b^2+c^2-a^2$, oder $(b+c)^2-a^2 : a^2-(b^2+c^2)$ gegeben.

Zusatz 1.

Es ist $(b+c)^2-a^2 : b^2+c^2-a^2 = 1+\cos.BAC : \cos.BAC$

$= 2\overline{\cos.\tfrac{1}{2}BAC}^2 : \cos.BAC;$

und $(b+c)^2-a^2 : a^2-(b^2+c^2) = 1-\cos.CAD : \cos.CAD$

$= 1+\cos.BAC : -\cos.BAC$

$= 2\overline{\cos.\tfrac{1}{2}BAC}^2 : -\cos.BAC.$

Zusatz 2.

Auf diesen Satz gründen sich einfache Auflösungen folgender Aufgaben: ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben seyen

A) Winkel BAC,

α) $(b+c)^2-a^2$, und

1) $b^2+c^2+a^2$

2) $b^2+c^2 : a^2$

3) $b^2-c^2+a^2$

4) $b^2 : c^2-a^2$.

β) $\left\{\begin{matrix} b^2+c^2-a^2 \\ a^2-(b^2+c^2) \end{matrix}\right\}$, und

1) $(b+c)^2+a^2$

2) $b+c : a$

3) $b+c+a$

4) $b+c-a$

5) $(b+c)a$.

B) $(b+c)^2-a^2$, $\left\{\begin{matrix} b^2+c^2-a^2 \\ a^2-(b^2+c^2) \end{matrix}\right\}$, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

Digitized by Google

Lehrsatz 18. (Fig. 9. a. b.)

Wenn ein Winkel BAC eines Dreieckes gegeben ist, so hat der Ueberschuß des Quadrates der Gegenseite über das Quadrat der Schenkeldifferenz zu dem Unterschiede der Summe der Quadrate der Schenkel und des Quadrates der Gegenseite ein gegebenes Verhältniß.

Beweis.

Es ist (Fig. a.) $b^2+c^2-a^2 : 2b.c = DA:AC$ (Lehrs. 11.)

also $\left.\begin{matrix} 2bc-b^2-c^2+a^2 \\ a^2-(b-c)^2 \end{matrix}\right\} : b^2+c^2-a^2 = CA-AD : DA$

Eben so (Fig. b.) $a^2-(b^2+c^2) : 2b.c = DA:AC$ (Lehrs. 11.)

also $\left.\begin{matrix} a^2-(b^2+c^2)+2bc \\ a^2-(b-c)^2 \end{matrix}\right\} : a^2-(b^2+c^2) = CA+AD:DA.$

Da der Winkel BAC gegeben, so ist $\triangle$ ADC der Art nach, also das Verhältniß DA:AC, folglich auch das Verhältniß $CA \mp AD : DA$, somit das Verhältniß $a^2-(b-c)^2 : b^2+c^2-a^2$, oder $a^2-(b-c)^2 : a^2-(b^2+c^2)$ gegeben.

Zusatz 1.

Es ist $a^2-(b-c)^2 : b^2+c^2-a^2 = 1-\cos.BAC : \cos.BAC$

$= \overline{2\cos.\tfrac{1}{2}BAC}^2 : \cos.BAC.$

$a^2-(b-c)^2 : a^2-(b^2+c^2) = 1+\cos.CAD : \cos.CAD$

$= 1-\cos.BAC : -\cos.BAC$

$= \overline{2\cos.\tfrac{1}{2}BAC}^2 : -\cos.BAC.$

Digitized by Google

Zusatz 2.

An diesen Satz knüpfen sich leicht die Auflösungen folgender Aufgaben: ein Dreieck zu beschreiben, von welchem gegeben seyen

A) Winkel BAC,

α) $a^2-(b-c)^2$, und

1) $b^2+c^2+a^2$

2) $b^2+c^2 : a^2$

3) $b^2-c^2+a^2$

4) $b^2 : c^2-a^2$.

β) $\left.\begin{matrix} b^2+c^2-a^2 \\ a^2-(b^2+c^2) \end{matrix}\right\}$, und

1) $a^2+(b-c)^2$

2) $a : b-c$

3) $a+b-c$

4) $a-b+c$

5) $a(b-c)$.

B) $a^2-(b-c)^2$, $\left.\begin{matrix} b^2+c^2-a^2 \\ a^2-(b^2+c^2) \end{matrix}\right\}$, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

Lehrsatz 19. (Fig. 14. a. b.) (cf. Data Satz I.)

Wenn in einem Dreiecke ABC der Winkel BAC der Spitze, und das Verhältniß der Grundlinie BC zur Höhe AD gegeben ist, so ist das Dreieck der Art nach gegeben.

Beweis.

Man beschreibe um das Dreieck einen Kreis, und ziehe durch die Spitze A eine gerade Linie, der Grundlinie parallel. Berührt dieselbe den Kreis (Fig. a.), so ist das

Digitized by Google

Dreieck gleichschenkelig, folglich ist wegen des gegebenen Winkels der Spitze das Dreieck der Art nach gegeben. Schneidet sie den Kreis (Fig. b.) in dem Punkte L, und läßt man von des Kreises Mittelpunkte O das Perpendikel OE auf BC herab, welches AL in K schneide, so ist KE : BC, also auch KE : EB gegeben. Da, wenn die gerade Linie BO gezogen wird, BOE=BAC ist, so ist △ BOE der Art nach, also BE : EO, mithin auch KE : EO, folglich KO : OE, und weil EO : OB gegeben ist, KO : $\left\{\begin{matrix}\text{OB}\\\text{OA}\end{matrix}\right.$, wenn die gerade Linie OA gezogen wird, somit △ LOK der Art nach, demnach auch der Winkel AOK gegeben. Zieht man die gerade Linie LC, so ist $\text{ACB} - \left\{\begin{matrix}\text{ACL}\\\text{BCL}\\\text{ABC}\end{matrix}\right\} = \text{AOK}$, also ist der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, und, weil ihre Summe gegeben ist, jeder derselben, somit △ ABC der Art nach, gegeben.

Lehrsatz 20. (Fig. 14. b.)

Wenn in einem Dreiecke ABC ein Winkel B an der Grundlinie, und das Verhältniß der Höhe AD zur Grundlinie BC gegeben ist, so ist das Dreieck der Art nach gegeben.

Beweis.

Da B gegeben ist, so ist △ ABD der Art nach, also das Verhältniß BA : AD gegeben. Da AD : BC gegeben ist, so ist AB : BC, mithin △ ABC der Art nach, gegeben.

Digitized by Google

Zusatz.

Wenn AD unter irgend einem gegebenen Winkel an die Grundlinie gezogen, und das Verhältniß AD : BC gegeben ist, so ist △ ABC der Art nach gegeben.

Lehrsatz 21. (Fig. 14. b.)

Wenn in einem Dreiecke der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, und das Verhältniß der Höhe zur Grundlinie gegeben ist, so ist das Dreieck der Art nach gegeben.

Beweis.

Wenn ein Kreis um das Dreieck beschrieben, die Sehne AL ∥ BC gemacht, die gerade Linie LC gezogen, der Mittelpunkt O mit den Punkten B, L durch die geraden Linien LO, OB verknüpft, das, die Linien BC, AL in E, K schneidende, Perpendikel OE auf BC gefällt, auch BK gezogen wird, so ist LOK = ACL

$$= ACB - \left\{\begin{matrix} BCL \\ ABC \end{matrix}\right.$$

also ist LOK gegeben, folglich ist △ LOK der Art nach, mithin $\left.\begin{matrix} LO \\ BO \end{matrix}\right\}$: OK gegeben.

Da $\left.\begin{matrix} AD \\ KE \end{matrix}\right\}$: BC gegeben ist, so ist auch KE : EB, demnach △ KEB der Art nach, somit Winkel $\left.\begin{matrix} BKE \\ BKO \end{matrix}\right\}$, also △ BOK der Art nach, folglich Winkel BOK, mithin $\left.\begin{matrix} BOE \\ BAC \end{matrix}\right\}$, somit ACB + ABC, demnach ACB, ABC, also △ ABC der Art nach, gegeben.

Digitized by Google

Lehrsatz 22. (Fig. 15.)

Ein Dreieck ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe, und das Verhältniß der Summe der Quadrate der Schenkel zum Quadrate der Grundlinie gegeben ist.

Beweis.

Da $BA^2+AC^2 : BC^2$ gegeben ist, so ist, wenn das Verhältniß ein Verhältniß des größeren zum kleineren ist, $BA^2+AC^2-CB^2 : BC^2$ gegeben.

Da $BC : AD$,

also $BC^2 : \frac{BC.AD}{2}$ gegeben ist, so ist auch $BA^2+AC^2-CB^2 : \left\{\begin{matrix}\frac{BC.AD}{2} \\ \triangle ABC\end{matrix}\right\}$, also der Winkel BAC, mithin $\triangle ABC$ der Art nach, gegeben.

Ist das Verhältniß ein Verhältniß des kleineren zum größeren, so ist $CB^2-(BA^2+AC^2) : BC^2$ gegeben.

Da auch $BC^2 : \triangle ABC$ gegeben ist,

so ist $CB^2-(BA^2+AD^2) : \triangle ABC$

folglich auch der Winkel der Spitze, somit $\triangle ABC$ der Art nach, gegeben.

Lehrsatz 23. (Fig. 15.)

Ein Dreieck ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe, und das Verhältniß der Schenkelsumme zur Grundlinie gegeben ist.

Digitized by Google

Beweis.

Da $\overline{BA+AC : CB}$ gegeben ist, so ist

$\overline{(BA+AC)^2 : CB^2}$

also $(BA+AC)^2 - CB^2 : BC^2$ gegeben.

Da $\overline{BC : AD}$

folglich auch $BC^2 : \frac{BC.AD}{2}$ gegeben ist,

so ist $(BA+AC)^2 - BC^2 : \left\{\begin{matrix}\frac{BC.AD}{2} \\ \triangle ABC\end{matrix}\right\}$,

mithin der Winkel der Spitze, somit $\triangle$ ABC der Art nach, gegeben.

Lehrsatz 24. (Fig. 15.)

Ein Dreieck ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe, und das Verhältniß der Schenkeldifferenz zur Grundlinie gegeben sind.

Beweis.

Da $\overline{BC : BA - AC}$ gegeben ist,

so ist $\overline{BC^2 : (BA-AC)^2}$

also $BC^2 - (BA-AC)^2 : CB^2$ gegeben.

Da $\overline{BC : AD}$

also $BC^2 : \left\{\begin{matrix}\frac{BC.AD}{2} \\ \triangle ABC\end{matrix}\right\}$ gegeben ist,

so ist $BC^2 - (BA-AC)^2 : \triangle$ ABC, somit der Winkel der Spitze, folglich das Dreieck der Art nach, gegeben.

Digitized by Google

Lehrsatz 25. (Fig. 15.)

Ein Dreieck ABC ist der Art nach gegeben, wenn der Winkel BAC der Spitze, und das Verhältniß des Quadrates der Höhe AD zu dem Rechtecke aus den Segmenten BD, DC der Grundlinie gegeben ist.

Beweis.

Beschreibt man um das Dreieck einen Kreis, dessen Mittelpunkt in O sey, verlängert das Perpendikel AD bis zum Durchschnitte des Kreises in E,

so ist AD.DE=BD.DC

also ist $AD^2 : AD.DE$ } gegeben,
$AD : DE$ }

folglich AD : { AD—DE
2DG, wenn OGA=R;

mithin AD : DG

somit AG : { GD
OP, wenn OPB=R;

gegeben.

Da BAC gegeben ist, so ist BOP(=BAC) gegeben, also ist △ BOP der Art nach, folglich PO : OB, mithin GA : OB } gegeben,
OK : OA }, wenn die Sehne AL ∥ BC, OKA=R ist demnach ist △ AOK der Art nach, also AOK } gege-
LCA
ACB—ABC }

ben. Da auch ACB+ABC gegeben ist, so sind ACB, ABC, also ist △ ABC der Art nach, gegeben.

Digitized by Google

Lehrsatz 26. (Fig. 15.) (Dat. 80.)

Ein Dreieck ist der Art nach gegeben, wenn der Winkel BAC der Spitze, und das Verhältniß des Rechteckes der Schenkel BA, AC zu dem Quadrate der Grundlinie BC gegeben ist.

Beweis.

Da der Winkel der Spitze gegeben ist, so ist das Verhältniß

$$BA.AC : \triangle BAC$$

also auch $BA.AC : BC.AD$ gegeben, wenn $2ADB = R$;

Da $BA.AC : BC^2$ gegeben ist,

so ist $BC^2 : BC.AD$
$BC : AD$ } gegeben, also $\triangle ABC$ der Art nach gegeben.

Lehrsatz 27. (Fig. 15.)

Ein Dreieck ist der Art nach gegeben, wenn seine Seiten geometrisch proportionirt sind, und der, der mittleren Seite gegenüberliegende, Winkel gegeben ist.

Beweis.

Ist $AB : BC = BC : CA$

so ist $BA.AC = BC^2$

folglich $BA.AC : BC^2 = 1 : 1$, also ist das Verhältniß des Rechteckes der Schenkel zum Quadrate der Grundlinie gegeben. Da auch der Winkel BAC gegeben ist, so ist $\triangle ABC$ der Art nach gegeben.

Digitized by Google

Lehrsatz 28. (Fig. 16.) (Data Satz K.)

Ein Dreieck ABC ist der Art nach gegeben, wenn der Winkel BAC der Spitze, und das Verhältniß der Segmente BD, DC der Grundlinie gegeben ist, in welche dieselbe durch eine, unter einem gegebenen Winkel ADB an sie gezogene, gerade Linie getheilt wird.

Beweis.

Beschreibt man um das Dreieck einen Kreis, dessen Mittelpunkt in E sey, und zieht die geraden Linien BE, EC, so ist BEC=2BAC, also gegeben. Da auch BE=EC, so ist △ BEC der Art nach, also sowohl EBC, als das Verhältniß EB:BC gegeben. Da BD:DC gegeben ist, so ist DB:BC, folglich auch EB:BD, mithin △ EBD der Art nach, somit sowohl $\left.\begin{matrix}BE\\AE\end{matrix}\right\}$: ED, als BED und EDB, demnach auch EDA, also △ AED der Art nach, folglich AED, und weil DEC=CEB−BED, auch AEC, somit ABC=½AEC, demnach △ ABC der Art nach, gegeben.

Lehrsatz 29. (Fig. 17.)

Ein Dreieck ABC ist der Art nach gegeben, wenn der Unterschied der Winkel ACB, ABC an der Grundlinie BC, und das Verhältniß der, durch das Perpendikel AD von der Spitze A auf die Grundlinie gebildeten, Segmente AD, DC der Grundlinie gegeben ist.

Beweis.

Ist ACB>ABC, so ist auch BA>AC, also BD>DC. Macht man ED=DC, zieht die gerade Linie AE, fällt

Digitized by Google

auf die Verlängerung derſelben das Perpendikel BF, und auf AC das Perpendikel BG, ſo iſt BAF=$\left\{\begin{matrix}AEC\\ACB\end{matrix}\right\}$—ABC,

alſo iſt BAF gegeben, folglich △BAF der Art nach, mithin das Verhältniß AB:BF gegeben.

Da BD:DC gegeben iſt, ſo iſt $\left.\begin{matrix}BD+DC : BD-DC\\ CB : BE\\ GB : BF\end{matrix}\right\}$

gegeben, demnach auch das Verhältniß AB:BG, ſomit BAC, alſo auch ACB+ABC, folglich ſowohl ACB, als ABC, mithin △ ABC der Art nach, gegeben.

Lehrſatz 30. (Fig. 18.)

Zwey Dreiecke ABC, abc ſind einander ähnlich, wenn die Verhältniſſe der Schenkel BA und AC, ba und ac, und die Verhältniſſe der Grundlinien und Höhen BC, AD, und bc, ad einander gleich ſind.

Beweis.

Macht man CAE=ABC, cac=abc, ſo iſt ſowohl △BAE∽△CAE, als △bac∽△cac, alſo ſowohl BE:EA=AE:EC=BA:AC, als bc:ca=ae:ec=ba:ac

folglich ſowohl $BE:EC=BE^2:EA^2=BA^2:AC$,

als $bc:cc=bc^2:ca^2=ba^2:ac^2$.

Da BA : AC=ba : ac

ſo iſt BE : EC=be : ec

mithin BE : $\left\{\begin{matrix}BE-EC\\ BC\end{matrix}\right\}$ = be : $\left\{\begin{matrix}be-ec\\ bc\end{matrix}\right\}$.

Digitized by Google

Da BC : AD = bc : ad

so ist BE : AD = bc : ad.

Da auch AE : EB = CA : AB

= ca : ab

= ae : eb

so ist EA : AD = ea : ad

folglich AED = aed,

mithin sowohl △BEA ∽ △bea, als △AEC ∽ △aec

demnach ABC = abc, ACE = ace

somit ACB = acb

also △ABC ∽ △abc.

Lehrsatz 31. (Fig. 18.) (Dat. Satz L.)

Ein Dreieck ABC ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß der Schenkel, und das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe gegeben ist.

Beweis.

Nimmt man eine gerade Linie bc nach Belieben, bestimmt das Perpendikel bh so, daß BC : AD = bc : bh, legt ha ∥ bc, beschreibet nach des Apollonius ebenen Oertern von Camerer, pag. 215, den Kreis, welcher der Ort für die Spitzen aller Dreiecke auf der Grundlinie bc mit dem Schenkelverhältniß = BA : AC ist, bezeichnet den Durchschnitt dieses Kreises mit ha durch a, und zieht die geraden Linien ba, ac, so ist △ bac der Art und Größe nach gegeben. Da aber △ BAC ∽ △bac, so ist auch △ BAC der Art nach gegeben.

Digitized by Google

Lehrsatz. 32. (Fig. 18.)

Ein Dreieck BAC ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß der Schenkel BA, AC und das Verhältniß einer, unter einem gegebenen Winkel an die Grundlinie BC gezogenen, geraden Linie AG zur Grundlinie gegeben ist.

Beweis.

Fällt man das Perpendikel AD auf die Grundlinie, so ist, wegen des gegebenen Winkels AGD, das Dreieck AGD der Art nach, also das Verhältniß GA : AD, und weil das Verhältniß GA : BC gegeben ist, auch das Verhältniß BC : AD, somit, wegen des gegebenen Verhältnisses BA : AC, △ ABC der Art nach, gegeben.

Lehrsatz 33. (Fig. 18.)

Ein Dreieck ABC ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß seiner Schenkel BA, AC, und das Verhältniß eines Schenkels BA zur Halbirungslinie AG des Winkels der Spitze gegeben ist.

Beweis.

Nimmt man BC als, der Lage und Größe nach, gegeben an, so liegt, wegen des gegebenen Verhältnisses BA : AC, der Punkt A auf einem gegebenen Kreisumfange (s. des Apollonius ebene Oerter von Camerer, p. 215.). Auch ist BG : GC = BA : AC, also ist der Punkt G gegeben. Da auch BA : AG gegeben ist, so liegt der Punkt A auf einem zweiten, nach demselben Satze in den ebenen Oertern zu findenden, Kreisumfange. Der Punkt A ist also gegeben. Es sind also die Seiten des Dreieckes ABC, also ist △ ABC der Art nach, gegeben.

Digitized by Google

Lehrsatz 34. (Fig. 18.) (Data Satz M.)

Ein Dreieck ABC ist der Art nach gegeben, wenn das Verhältniß der Schenkel BA, AC, und das Verhältniß der, durch das Perpendikel AD von der Spitze auf die Grundlinie gebildeten, Segmente BD, DC der Grundlinie BC gegeben ist.

Beweis.

Da das Verhältniß BA : AC gegeben ist,

so ist $\left.\begin{matrix} BA+AC \\ BA^2-AC^2 \\ BD^2-DC^2 \end{matrix}\right\}$: $\left.\begin{matrix} BA-AC \\ (BA-AC)^2 \end{matrix}\right\}$ gegeben.

Da das Verhältniß BD : DC gegeben ist,

so ist $\left.\begin{matrix} BD+DC \\ BD^2-DC^2 \end{matrix}\right\}$: $\left.\begin{matrix} BD-DC \\ (BD-DC)^2 \end{matrix}\right\}$ gegeben,

also ist auch $(BA-AC)^2 : (BD-DC)^2$

somit $\left.\begin{matrix} BA-AC \\ BD+DC \end{matrix}\right\}$ gegeben.

Da BA+AC : BA gegeben ist,

so ist BD+DC : BA gegeben.

Und da BD : BD+DC gegeben ist,

so ist DB : BA

also Winkel LBC, wenn BA um LA=AC verlängert ist;

folglich △ LBC der Art nach,

mithin Winkel BLC

somit auch BAC=2BLC, demnach △ABC der Art nach, gegeben.

Aufgaben,

welche nach den Vorschriften der geometrischen Analysis behandelt sind.

Digitized by Google

Digitized by Google

Aufgabe 1. (Fig. 19.)

Durch zwey, außerhalb und innerhalb eines gegebenen Kreises DBE, gegebene Punkte A, C einen Kreis zu beschreiben, welcher jenen Kreis so schneide, daß die beiden Kreisen gemeinschaftliche Sehne durch einen gegebenen Punkt O laufe.

Analysis.

Es sey AEC der gesuchte Kreis, und die gerade Linie AC schneide den gegebenen Kreis in den Punkten B, D, so ist, wenn die gemeinschaftliche Sehne EF die Linie AC in x schneidet, $Ax.xC = Ex.xF = Dx.xB$

folglich $Ax : xB = Dx : xC$

mithin $AB : Bx = DC : Cx$

somit $AB : CD = Bx : xC$;

demnach ist der Punkt x, also die gerade Linie Ox, folglich der Durchschnitt E derselben mit dem gegebenen Kreise, somit der Kreis AEC gegeben.

Construction.

Man ziehe die, den gegebenen Kreis in B, D schneidende, gerade Linie AC, lege durch B, C die Parallelen

Digitized by Google

BG, CH, schneide auf verschiedenen Seiten der Linie BC die Segmente BG, CH, den Segmenten AB, CD gleich, ab, verbinde die Punkte G, H durch die, die Linie BC in x schneidende, gerade Linie GH, ziehe die, den gegebenen Kreis in E schneidende, gerade Linie Ox, und beschreibe durch die Punkte A, E, C einen Kreis. Derselbe wird das verlangte leisten.

Beweis.

Es ist $AB : CD = Bx : xC$

also $AB : Bx = DC : Cx$

folglich $Ax : xB = Dx : xC$

somit $Ax \cdot xC = Bx \cdot xD$.

Nun ist, wenn Ex den gegebenen Kreis in F schneidet,

$Bx \cdot xD = Ex \cdot xF$

mithin $Ax \cdot xC = Ex \cdot xF$.

Es liegt also der Punkt F auch auf dem Kreisumfange AEC, EF ist demnach die gemeinschaftliche Sehne, und der Kreis AECF leistet das verlangte.

Aufgabe 2. (Fig. 20.)

Durch zwey, außerhalb eines gegebenen Kreises, gegebene Punkte A, C, deren Verbindungslinie den Kreis in B, D schneide, einen Kreis zu beschreiben, welcher jenen Kreis so treffe, daß die gemeinschaftliche Chorde durch den gegebenen Punkt O laufe.

Digitized by Google

Analysis.

Es sey AEC der gesuchte Kreis, so ist, wenn die Sehne FE der Linie AC in x begegnet,

$$Ax.xC = Ex.xF = Dx.xB$$

$$\text{also } Ax:xD = Bx:xC$$

$$\text{folglich } DA:Ax = CB:Bx$$

$$\text{mithin } AD:BC = Ax:xB;$$

demnach ist der Punkt x, somit die gerade Linie Ox, der Punkt E, und der Kreis AEC gegeben.

Construction.

Man richte in A, B die Perpendikel AG, BH, den Linien AD, BC gleich, auf, ziehe die, die Linie AC in x schneidende, gerade Linie HG, verbinde die Punkte x, O durch die, den gegebenen Kreis in E, F schneidende, gerade Linie EF, und beschreibe durch die Punkte A, C, E einen Kreis. Derselbe wird das verlangte leisten.

Beweis.

Es ist $\left.\begin{matrix} AG:BH \\ AD:BC \end{matrix}\right\} = Ax:xB$

$$\text{also } DA:Ax = CB:Bx$$

$$\text{folglich } Ax:xD = Bx:xC$$

$$\text{mithin } Ax.xC = Bx.xD = Ex.xF,$$

wenn F den Durchschnitt des gegebenen Kreises mit Ox bezeichnet;

Digitized by Google

demnach liegt F auf dem Umfange des Kreises CAE, und es leistet derselbe das verlangte.

Aufgabe 3. (Fig. 21.)

In ein gegebenes Dreieck ABC ein Rechteck EFGH zu legen, in welchem die Grundlinie die Höhe um die gegebene Linie d übertreffe.

Analysis.

Es sey EFGH das gesuchte Rechteck, so ist EF—FG=d. Fällt man das, die Linie FE in L schneidende, Perpendikel AD, so ist $AL+\left\{\begin{matrix}LD\\FG\end{matrix}\right\}=AD$

also AL+EF=AD+d.

Nun ist AL : FE=AD:BC, also ist AL, folglich der Punkt L, mithin das Rectangel EFGH gegeben.

Construction.

Man fälle das Perpendikel AD auf BC, verlängere dasselbe um KD=d, ziehe die gerade Linie KC, derselben die Linie BO parallel, welche der, der Linie BC parallel laufenden, Linie BC in O begegne, mache AM parallel BC, nehme AM=AD, ziehe die, die Linie AD in L schneidende, gerade Linie OM, lege durch L die Linie FE∥BC, und vollende das Rechteck EFGH, so ist dasselbe das verlangte.

Beweis.

Es ist EF:AL = BC:AD
= KO:AM
= KL:LA

Digitized by Google

also EF=KL
=LD+DK
=FG+d

folglich EF—FG=d.

Zuſatz.

Macht man auch AM′=AD, zieht die gerade Linie OM′, verlängert dieſelbe, bis ſie der verlängerten AD in L′ begegne, legt durch L′ die, die Verlängerungen von CA, AB in E′, F′ ſchneidende, Linie E′F′#BC, und fällt E′H′, F′G′ auf BC perpendikular herab,

ſo iſt E′F′:AL′=BC:AD
=KO:AM′
=KL′:L′A

also E′F′=KL′
=L′D+DK
=F′G′+d

folglich E′F′—F′G=d;

mithin iſt ein zweites Rechteck gefunden, deſſen Grundlinie in der Richtung von BC liegt, deſſen gegenüberliegende Winkelpunkte in der Richtung der Linien CA, AB liegen, und in welchem die Grundlinie die Höhe um eine Linie =d übertrifft.

Aufgabe 4. (Fig. 22.)

In ein gegebenes Dreieck ABC ein Rechteck EFGH zu legen, deſſen Grundlinie in der Richtung der Grundlinie BC liege, deſſen derſelben gegenüberliegende Winkelpunkte in der Richtung der Schenkel BA, AC liegen, und deſſen Umfang der gegebenen geraden Linie 2S gleich ſey.

Digitized by Google

Analysis.

Es sey EFGH das gesuchte Rechteck, so ist EF+FG=S. Fällt man das Perpendikel AD auf die Grundlinie BC, so ist AL+LD=AD, wenn L den Durchschnitt der Linien AD, FE bezeichnet,

also EF—AL=S—AD.

Da EF:AL=BC:AD, so ist AL, somit der Punkt L, und das Rechteck EFGH gegeben.

Construction.

Man fälle das Perpendikel AD auf BC, mache DK=S, ziehe die gerade Linie BK, mache KO∥BC, CO∥BK, AM∥BC, MA=AD, verbinde O mit M durch die, die Linie AD in L schneidende, gerade Linie OM, lege durch L die Linie FE∥BC, und vollende das Rechteck EFGH, so ist dasselbe das verlangte.

Beweis.

Es ist EF : AL=BC : AD
=KO : AM
=KL : LA

also EF=KL

folglich EF+FG=KL+LD
=KD
=S.

Zusatz

Macht man auch AM′=AD, zieht die, die Linie DK in L′ schneidende, gerade Linie OM′, legt durch L die

Digitized by Google

Linie E'F' der Linie BC parallel, und vollendet das Rechteck E'F'G'H', so ist E'F' : AL' = BC : AD
= KO : AM'
= KL' : L'A

also E'F' = KL'
= KD — DL'
= S — F'G'

folglich E'F' + F'G' = S.

Mithin ist ein zweites Rechteck mit den gegebenen Eigenschaften gefunden.

Aufgabe 5. (Fig. 23.)

In der Ebene eines gegebenen Dreieckes ABC einen Punkt O zu finden, dessen Entfernungen von den Seiten sich, wie die gegebenen geraden Linien α, β, γ verhalten.

Analysis.

Es sey O der gesuchte Punkt, und DO:OE:OF = α:β:γ, wenn von dem Punkte O Perpendikel auf die Seiten des Dreieckes gefällt werden; so ist, wenn man die gerade Linie AO zieht, und bis zum Durchschnitte mit der Linie BK, welche durch B, der Linie DO parallel, gezogen ist, verlängert, auch KI, der Linie OE parallel, zieht, und den Durchschnitt I der Linien AC, KI mit dem Punkte B durch die gerade Linie BI verknüpft, BKI = DOE
= 2R — BAC, also ist BKI gegeben. Auch ist BK : KI = DO : OE
= α : β,

folglich ist das Dreieck BKI der Art nach, somit der Win-

Digitized by Google

kel KBI, folglich, wegen der der Lage nach gegebenen Linie KB, der Punkt I, die Lage der Linie KI, der Punkt K, und die Lage der Linie AK gegeben.

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß die Lage der geraden Linie BO gefunden werden kann. Folglich läßt sich der Punkt O, als Durchschnitt der Linien AO, BO, finden.

Construction.

Man richte in B ein Perpendikel KB auf BA auf, mache BG=α, lege in G einen Winkel BGH=2R—BAC an, welches geschieht, indem man ein Perpendikel GO auf AC fällt, nehme GH=β, ziehe die gerade Linie BH, welche der Linie AC, oder ihrer Verlängerung, in I begegne, richte in I auf AI das Perpendikel IK auf, welches die Linie BK in K erreiche, und ziehe die gerade Linie AK. Eben so richte man in C auf CB ein Perpendikel auf, nehme auf demselben CL=γ, lege an CL in L den Winkel CLM=2R—ABC an, welches durch ein Perpendikel von L auf AB erreicht wird, mache LM=α, ziehe die, der Linie BA in N begegnende, gerade Linie CM, richte in N auf BA ein Perpendikel auf, welches die Linie CL in P erreiche, und ziehe die, die Linie AK in O schneidende, gerade Linie BP, so ist O der gesuchte Punkt.

Beweis.

Läßt man von O auf die Seiten des Dreieckes die Perpendikel DO, OE, OF herab, so ist OD$\#$KB, OE$\#$KI, also DO:OE=BK:KI.

Digitized by Google

Nun iſt BKI = 2R — BAC
= BGH

folglich BK:KI = BG:GH

mithin auch DO:OE = BG:GH
= $\alpha : \beta$.

Eben ſo iſt DO:OF = NP:PC.

Es iſt aber NPC = 2R — ABC
= CLM

demnach NP:PC = ML:LC

ſomit DO:OF = ML:LC
= $\alpha : \gamma$.

Zuſatz.

Verlängert man GH rückwärts, macht H'G = GH, zieht die gerade Linie H'B, verlängert ſie bis zum Durchſchnitte mit CA in I', richtet in I' ein Perpendikel auf I'C auf, welches dem Perpendikel KB in K' begegne, und zieht die gerade Linie K'A; verlängert man eben ſo ML rückwärts, macht M'L = LM, zieht die gerade Linie CM', deren Verlängerung der Linie BA in N' begegne, richtet in N' ein Perpendikel auf CN' auf, welches das Perpendikel CL in P' ſchneide, und zieht die gerade Linie P'B, welche der Linie KA in O' begegne, ſo iſt, wenn man von dem Punkte O' die Perpendikel O'D', O'E', O'F' auf die Linien AB, AC, BC herabläßt,

O'D' # K'B, O'E' # K'I'

alſo D'O':O'E' = BK':K'I'.

Digitized by Google

Nun ist $BK'I' = BAC$
$= BGH'$

folglich $BK' : K'I = BG : GH'$
$= \alpha : \beta.$

Auch ist $DO' : N'P' = O'B : BP'$
$= O'F' : P'C$

mithin $DO' : O'F' = N'P' : P'C.$

Es ist aber $M'L \# N'P'$

somit $N'P'C = CLM'$

demnach $N'P' : P'C = M'L : LC$

also $DO' : O'F' = M'L : LC$
$= \alpha : \gamma.$

Mithin ist in der Ebene des Dreieckes ABC ein zweiter Punkt O' gefunden worden, dessen Entfernungen von den Seiten dieses Dreieckes in den gegebenen Verhältnissen stehen.

Aufgabe 6. (Fig. 24.).

Ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten arithmetisch proportionirt seyen, und dessen Umfang der gegebenen geraden Linie S gleich sey.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck,
so ist $AB - BC = BC - CA$

also $BA + AC = 2BC$

folglich $BA + AC : CB = 2 : 1;$

Digitized by Google

mithin ist (Dat. 46.) △ ABC der Art nach gegeben. Da auch $\left.\begin{matrix} BA+AC+CB \\ S \end{matrix}\right\} : BC=3:1$, so ist BC, somit das Dreieck der Art und Größe nach, gegeben.

Construction.

Man mache ACB=R, DC=2CF, FDE=FDC, CB=$\frac{1}{3}$S, BA#ED, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

Es ist ED:DC=EF:FC (El. VI. 3.)

also ED+DC:CD=EF+FC:CF

folglich $\left.\begin{matrix} ED+DC: \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} EF+FC \\ CE \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} DC:CF \\ 2:1. \end{matrix}$

Nun ist BA:AC=ED:DC

mithin BA+AC:CA=ED+DC:CD.

Auch ist AC:CB=DC:CE

somit BA+AC:CB=ED+DC:CE

=2:1

demnach BA+AC=2CB, und BA+AC+CB:BC=3:1

also AB—BC=BC—CA =S:$\frac{1}{3}$S

folglich BA+AC+CB=S.

Aufgabe 7. (Fig. 25.)

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben, dessen

Seiten geometrisch proportionirt seyen, und dessen Umfang der gegebenen geraden Linie S gleich sey.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist, wenn EB=BA, GC=CA gemacht wird,

$$\left.\begin{matrix} EB+BC+CG \\ EG \end{matrix}\right\} = AB+BC+CA = S,$$

also ist die gerade Linie EG gegeben. Zieht man EF∥AB, GF∥AC, so ist $\triangle EFG \sim \triangle ABC$

also CB:BA=GE:EF, BA:AC=EF:FG.

Da CB:BA=BA:AC

so ist GE:EF=EF:FG

$$\text{also } \left.\begin{matrix} GE^2:EF^2 \\ \text{d. i. } GE^2:GE.ED \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} EF^2:FG^2 \\ GE.ED:EG.GD \end{matrix}\right., \text{ wenn } GFD=R;$$

folglich GE:ED=ED:DG;

mithin ist der Punkt D gegeben. Da GEF=R=GFD, so ist der Punkt F, somit $\triangle$ GEF gegeben. Da, wenn die geraden Linien AE, AG gezogen werden, AEB=BAE=AEF, AGC=GAC=AGF, so ist die Lage der Linien AE, AG, also auch der Punkt A, und weil AC∥GF, AB∥EF, die Lage der Linien AC, AB, folglich das Dreieck ABC gegeben.

Construction.

Man mache GE=S, beschreibe über GE das Quadrat GEHK, halbire EH in L, ziehe die gerade Linie LG, mache ML=LG, DE=EM, beschreibe über GD einen

Digitized by Google

Halbkreis, welcher der Linie EH in F begegne, ziehe die gerade Linie GF, halbire die Winkel GEF, FGE durch die geraden Linien EA, AG, und ziehe CA#FG, AB#EF, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis.

Es ist GE:ED=ED:DG (El. VI. 30.)

also $GE^2 : \left\{\begin{matrix} GE.ED \\ EF^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} GE.ED:DG.GE \\ EF^2:FG^2 \end{matrix}\right\}$

folglich $\left\{\begin{matrix} GE:EF \\ CB:BA \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} EF:FG \\ BA:AC. \end{matrix}\right\}$

Da BAE=AEF, CAG=CGA
=AEB =AGF

so ist AB=BE, AC=CG

mithin AC+CB+BA=GC+CB+BE=S.
Und weil ABC=BAE+BEA
=BEF,

so ist ABC=R. Demnach ist ABC das gesuchte Dreieck.

Zusatz.

Macht man auch LM'=LG, D'E=EM', beschreibt über GE einen Halbkreis, welcher von dem, in D' auf der Linie GE aufgerichteten, Perpendikel in F' geschnitten werde, zieht die geraden Linien EF', F'G, halbirt die Winkel F'EG, F'GE durch die geraden Linien A'E, AG, und zieht die geraden Linien A'B', A'C' den Linien EF', F'G parallel, so ist

Digitized by Google

$$GE:ED' = ED':D'G$$

$$\text{also } GE^2 : \begin{cases} GE.ED' \\ EF'^2 \end{cases} = \begin{cases} GE.ED':D'G.GE \\ EF'^2:F'G^2 \end{cases}$$

$$\text{folglich } GE:EF' \begin{cases} = \begin{cases} EF':F'G \\ B'A':A'C'. \end{cases} \\ C'B':B'A' \end{cases}$$

Da $B'A'E = A'EF'$, $C'A'G = C'GA'$
$= A'EB'$ $= A'GF'$

$$\text{so ist } A'B' = B'E, \quad A'C' = C'G$$

mithin $A'C' + C'B' + B'A' = G'C + C'B' + B'E = S$. Und weil $A'B' \# EF'$, $A'C' \# F'G$, so ist $B'A'C' = R$. Mithin ist ein zweites Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften gefunden.

Aufgabe 8. (Fig. 26.)

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten geometrisch proportionirt seyen, und wovon eine Seite der gegebenen geraden Linie S gleich sey.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, in welchem $CB = S$,
so ist $CB:BA = BA:AC$

$$\text{also auch } CB^2 : \begin{cases} BA^2 \\ \text{d. i. } CB^2:CB.BD \end{cases} = \begin{cases} BA^2:AC^2 \\ CB.BD:BC.CD \end{cases}$$

$$\text{folglich } CB:BD = BD:DC;$$

mithin läßt sich der Punkt D, und dadurch $\triangle$ ABC finden.

Digitized by Google

Construction.

Man beschreibe über CB=S das Quadrat BCFE, halbire BE in G, ziehe GC, mache HG=GC, DB=BH, suche die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen CB, BD, beschreibe zu dem Ende über BC einen Halbkreis, mache BA=R, und ziehe die gerade Linie BA, so ist, wenn AC gezogen wird, ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

Es ist CB:BD = BD:DC (El. VI. 30.)

CB^2: CB.BD = CB.BD:BC.CD

BA^2 = BA^2:AC^2

---

also CB:BA=BA:AC.

Da auch CB=S, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Zusatz.

Macht man auch H'G=GC, D'B=BH', sucht die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen CB, BD', welches durch einen, über CD' beschriebenen, die Linie BE in A' schneidenden, Halbkreis geschieht, und zieht die gerade Linie CA',

so ist CB:BD' = BD':D'C (El. VI. 30.)

CB^2: CB.BD' = CB.BD':D'C.CB

BA'^2 = BA'^2:$A'C^2$

---

also CB:BA'=BA':A'C.

Da auch CB=S, so ist ein zweites Dreieck A'BC mit den gegebenen Eigenschaften gefunden.

Digitized by Google

Aufgabe 9. (Fig. 27.)

Von einem, in einem gegebenen Kreisumfange, gegebenen Punkte B aus einen Bogen BA abzuschneiden, dessen Cosinus CD der Tangente BG gleich sey.

Analysis.

Es sey AB der gesuchte Bogen,

so ist AD:DC=GB:BC

=DC:CA

also auch BH:HC=HC:CB, wenn BHC=R;

folglich $\left.\begin{matrix} BH^2 \\ CB.BK \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} HC^2 \\ BC.CK \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} HC^2 \\ BC.CK \end{matrix}\right. \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} : CB^2$

mithin BK:KC=KC:CB;

demnach ist der Punkt K, △ BHC, Winkel BCA, Punkt A gegeben.

Construction.

Man mache BCL=R, halbire den Radius CL in O, ziehe die gerade Linie BO, mache PO=OB, KC=CP, beschreibe über BC einen Halbkreis, welcher von dem, in K auf BC aufgerichteten, Perpendikel in H geschnitten werde, und ziehe HC, so bestimmt der Durchschnitt dieser Linie mit dem Kreisumfange den gesuchten Punkt A.

Beweis.

Es ist BK : KC=KC : CB (El. VI. 30.)

also $\left.\begin{matrix} CB.BK \\ BH^2 \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} BC.CK \\ HC^2 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} BC.CK \\ HC^2 \end{matrix}\right. \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} : CB^2$

Digitized by Google

folglich BH : HC = HC : CB

mithin $\left.\begin{matrix} AD : DC \\ GB : BC \end{matrix}\right\} = DC : CA$

somit GB = DC.

Zusatz.

Nimmt man auch OP′=OB, K′C=CP′, sucht die *mittlere* geometrische Proportionallinie zwischen BC, CK′, indem man über BK′ einen Halbkreis beschreibt, welcher dem Perpendikel CL in H begegne, so ist auch

BK′:K′C=K′C:CB (El. VI. 30.)

folglich $\left.\begin{matrix} CB.BK' : BC.CK' \\ BH'^2 : CH'^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} BC.CK' \\ CH'^2 \end{matrix}\right\} : BC$

mithin $\left.\begin{matrix} BH' : H'C \\ A'D' : D'C \\ G'B : BC \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} H'C : CB \\ D'C : CA, \text{ wenn } A'C \text{ perpendikular auf } BH' \text{ ist;} \end{matrix}\right.$

somit G′B = D′C;

demnach ist ein zweiter Punkt A′ gefunden, welcher das verlangte leistet.

Aufgabe 10. (Fig. 28.)

Von den Endpunkten B, C einer gegebenen Sehne BC eines gegebenen Kreises zu einem Punkte A der Peripherie gerade Linien zu ziehen, daß das Rektangel derselben dem Unterschiede ihrer Quadrate gleich sey.

Digitized by Google

Analysis.

Es sey A der gesuchte Punkt,

so ist $BA.AC = BA^2 - AC^2$

$= BH^2 - HC^2$, wenn $AHB = R$;

$= (BH + HC)(BH - HC)$

$= 2BC.DH$

folglich $2BC.DH : BC.AH \left\{ \begin{matrix} = BA.AC : BA.CM, \text{ wenn } CMA = R; \\ 2DK : HA \quad = AC : CM \end{matrix} \right.$

mithin $DH : HA = AC : 2CM$.

Da BAC ein gegebener Winkel ist, so ist AC:2CM, also auch DH:HA, somit $\triangle$ ADH der Art nach, demnach der Winkel ADH, folglich der Punkt A gegeben.

Construction.

Man lege in B eine Tangente an den Kreis, fälle von dem Halbirungspunkte D der Linie BC auf dieselbe ein Perpendikel DK, richte auch auf BC in D ein Perpendikel DL auf, mache DL=2DK, ziehe die gerade Linie BL, und lege derselben die, den Umfang in A schneidende, gerade Linie DA parallel, so ist A der gesuchte Punkt.

Beweis.

Fällt man von A auf BC das Perpendikel AH,

so ist $DH : HA = BD : \left\{ \begin{matrix} DL \\ 2DK \end{matrix} \right.$

also $2DH.BC : BC.AH = BD : DK$

$= AC : CM$, wenn BA, AC gezogen werden, und AMC=R ist,

$= BA.AC : BA.CM$

folglich $\left.\begin{matrix} 2DH \,.\, BC \\ BH^2 - HC^2 \\ BA^2 - AC^2 \end{matrix}\right\} = BA.AC.$

Zusatz.

Verlängert man AD bis zum zweiten Durchschnitte mit dem Kreisumfange in A′, zieht CA′, A′B, fällt das Perpendikel A′H′ auf BC, CM′ auf die Verlängerung von BA′, so ist $DH' : H'A = BD : \left\{\begin{matrix} DL \\ 2DK \end{matrix}\right.$

---

also $2DH'.BC : BC.AH' = BD:DK$
$= A'C:CM'$
$= BA'.A'C : BA'.CM'$

---

folglich $\left.\begin{matrix} 2DH' \,.\, BC \\ CH'^2 - H'B^2 \\ CA'^2 - A'B^2 \end{matrix}\right\} = BA'.A'C;$

mithin ist ein zweiter Punkt A′ mit den gegebenen Eigenschaften auf dem Kreisumfange gefunden.

Aufgabe 11. (Fig. 29.)

Die Seiten BA, BC des gegebenen Dreieckes ABC durch die Linien AD, CE in dem Verhältnisse 1 : 2 zu verlängern, daß das Dreieck DBE das Doppelte des Dreieckes ABC werde.

Analysis.

Es seyen AD, CE die gesuchten Linien, also $\triangle DBE = 2.\triangle ABC$, so ist

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{r} DB.BE \\ (BA+AD)\ (BC+2AD) \end{array}\right\} = 2.AB.BC$$

also $(2AB+BC+2AD)AD = AB.BC$

folglich $(\frac{1}{2}BC+AB+AD)AD = \frac{AB.BC}{2}$,

mithin ist AD, somit CE gegeben.

Construction.

Man verlängere AB um $GB = \frac{1}{2}BC$, richte in G, A die Perpendikel HG, AF auf AG auf, mache HG=GB, FA=AB, beschreibe über der geraden Linie HE als Durchmesser einen Kreis, welcher die Verlängerung von BA in D schneide, nehme CE=2AD, und ziehe die gerade Linie DE, so ist DBE das gesuchte Dreieck.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Es ist } GD.DA \\ (\frac{1}{2}BC+AB+AD)DA \end{array}\right\} = \begin{array}{l} AF.GH \\ \frac{1}{2}AB.BC \end{array}$$

also $(2AB+BC+2AD)AD = AB.BC$

folglich $\left.\begin{array}{r} AB.BC+(2AB+BC+2AD)AD \\ (BA+AD)\ (BC+2AD) \\ DB.BE \end{array}\right\} = 2AB.BC$

mithin $\triangle DBE = 2.\triangle ABC$.

Zusatz.

Macht man $E'C = 2AD'$, und zieht die gerade Linie $D'E'$, so ist

Digitized by Google

$$GD'.D'A = AF.GH$$

folglich $(AD' - \frac{1}{2}BC - AB)AD' = \frac{1}{2}AB.BC$

also $(2AD' - BC - 2AB)AD' = AB.BC$

folglich $AB.BC + \left.\begin{matrix}(2AD' - BC - 2AB)AD' \\ (D'A - AB)\ (2D'A - BC) \\ D'B.BE'\end{matrix}\right\} = 2AB.BC$

mithin $\triangle D'BE' = 2.\triangle ABC$.

Demnach ist auch ein Dreieck $D'BE' = 2.\triangle ABC$ dadurch gefunden worden, daß man die Seiten BA, BC des Dreieckes ABC von Linien AD', CE', welche in dem Verhältnisse 1 : 2 stehen, abgezogen hat.

Aufgabe 12. (Fig. 30.)

Auf dem gegebenen Halbmesser AC eines gegebenen Kreises zwey einander ähnliche gleichschenkelige Dreiecke AEF, FDC zu beschreiben, deren Spitzen E, D in der Peripherie liegen, und Summe der Grundlinien = AC sey.

Analysis.

Es seyen AEF, FDC die gesuchten Dreiecke, so ist, wenn die gerade Linie EC gezogen wird,

$\triangle AEC \sim \triangle FAE$ (El. VI. 4.)

also CA: $\left.\begin{matrix}AE = EA \\ CF = CF\end{matrix}\right\}$ AF

weil $\triangle AEC \cong \triangle FDC$ (El. I. 4.); mithin ist der Punkt F, somit sowohl $\triangle$ AEF, als $\triangle$ FDC gegeben.

Construction.

Man lege den Halbmesser KC perpendikular auf AC,

Digitized by Google

halbire KC in L, ziehe die gerade Linie AL, beschreibe aus L, als Mittelpunkte, mit LA, als Radius, einen Kreis, welcher der verlängerten KC in M begegne, nehme FC=CM, halbire CF, FA, und richte in den Halbirungspunkten H, G die Perpendikel HD, GE auf, so sind, wenn die Linien CD, DF, FE, EA gezogen werden, die Dreiecke CDF, FAE die gesuchten.

Beweis.

Es ist AC : CF = CF : FA (El. VI. 30.)

Da $\triangle$CAE $\sim$ $\triangle$AFE (El. VI. 4.)

so ist CA : AE = EA : AF

also AE = CF

folglich $\triangle$AEC $\cong$ $\triangle$CFD (El. I. 8.)

mithin $\triangle$CFD $\sim$ $\triangle$AEC.

Zusatz.

Bezeichnet man den Durchschnitt des Kreises, welcher in L seinen Mittelpunkt hat, mit der verlängerten CK durch M', und macht F'C=CM', so ist

AC : CF' = CF' : FA (El. VI. 30.)

Da AC < F'A

so ist $AC \left\{ \begin{matrix} \\ BC \end{matrix} \right\} < CF'$

also AB < AF'

folglich $AC < \begin{cases} \frac{AF'}{2} \\ AG', \text{ wenn } AG' = G'F; \end{cases}$

Digitized by Google

Auch ist $\left.\begin{matrix} F'C-CA \\ F'B \end{matrix}\right\} : AC = \left\{\begin{matrix} AF'-F'C \\ AC \end{matrix}\right\} : CF'$

Da $F'B < CF'$

so ist auch $F'B < \left\{\begin{matrix} CA \\ CB \end{matrix}\right.$

mithin $AF' < 3CB$, $F'C < 2CB$

somit $\left.\begin{matrix} \frac{1}{2}AF' \\ AG' \end{matrix}\right\} < \frac{3}{2}CB$, $\left.\begin{matrix} \frac{1}{2}FC' \\ CH' \end{matrix}\right\} < CB$ wenn $CH' = H'F$;

demnach liegen G', H' zwischen B, C.

Da ferner $\triangle CE'A \sim \triangle AE'F'$ (El. VI. 4.)

so ist $CA : AE' = E'A : AF'$

also $\left.\begin{matrix} CA.AF' \\ CF'^2 \end{matrix}\right\} = AE'^2$ (El. II. 11.)

folglich $CF' = AE'$

mithin $\triangle AE'G \cong \triangle CD'F'$

somit $\triangle CD'F' \sim \triangle AE'F'$.

Es sind also auch zwey einander ähnliche gleichschenkelige Dreiecke gefunden worden, deren Spitzen in der Peripherie des gegebenen Kreises liegen, und bey welchen die Differenz der Grundlinien $= AC$ ist.

Aufgabe 13. (Fig. 31.)

Durch den gegebenen Punkt D eine gerade Linie EF zu legen, welche von dem gegebenen Dreiecke ABC ein Dreieck BEF abschneide, dessen Flächenraum zu dem des gegebenen Dreieckes ABC in dem Verhältnisse der gegebenen geraden Linien p, q stehe.

Digitized by Google

Analysis.

Es sey EBF das gesuchte Dreieck, also

$\triangle EBF : \triangle ABC = p:q$
$= MB:BC$, wenn $MB:BC = p:q$;
$= \triangle ABM : \triangle ABC$

so ist $\triangle EBF = \triangle ABM$
$= \triangle GBL$, wenn $DG \# BC$, $AL \# GM$;

mithin $EB.BF = GB.BL$

demnach $\left.\begin{matrix} GB \\ ND \\ NF:FB \end{matrix}\right\} : BE = FB:BL$ wenn $ND \# AB$;

somit $\left.\begin{matrix} NF-FB \\ NB \end{matrix}\right\} : BF = \left\{\begin{matrix} FB-BL \\ FL \end{matrix}\right\} : LB$.

also $BF.FL = NB.BL$.

Da der Punkt L gegeben ist, so ist der Punkt F, somit die gerade Linie DF gegeben.

Construction.

Man bestimme den Punkt M so, daß $MB:BC = p:q$, mache $DG \# BC$, ziehe GM, MA, $AL \# MG$, verbinde die Punkte G, L durch die gerade Linie GL, nehme $BLH = R = LBK$, $HL = LB$, $KB = BN$, und beschreibe über der Verbindungslinie KM, als Durchmesser, einen Kreis, welcher die Verlängerung von BL in F schneide, so ist die gerade Linie DEF die verlangte.

Digitized by Google

Beweis.

Es ist $BF.FL = HL.BK$
$= NB.BL$

---

also $NB:BF = FL:LB$

---

folglich $\left.\begin{matrix} NF \\ ND \\ GB \end{matrix}\right\} : BE = FB:BL$

---

mithin $EB.BF = GB.BL$

---

somit $\triangle EBF = \triangle GBL$
$= \triangle ABM$

---

demnach $\triangle EBF : \triangle ABC = \triangle ABM : \triangle ABC$
$= MB:BC$
$= p : q.$

Zusatz.

Verbindet man den anderen Durchschnitt F′ des Kreises und der verlängerten MB mit D durch die gerade Linie DF′, welche der verlängerten AB in E′ begegne, so ist $BF'.F'L = HL.BK$
$= NB.BL$

---

also $NB : BF' = F'L : LB$

Da $F'L > LB$

---

so ist $NB > BF'$;

folglich schneidet die Verlängerung von DF′ die Verlängerung von AB.

Digitized by Google

Auch ist $NF' : F'B \} = F'B : BL$
$ND \} : BE' \}$
$GB \}$

mithin $F'B.BE' = GB.BL$

somit $\triangle E'BF' = \triangle GBL$
$= \triangle ABM$

demnach $\triangle E'BF' : \triangle ABC = \triangle ABM : \triangle ABC$
$= MB : BC$
$= p : q.$

Es ist also auch in dem Verticalwinkel des Winkels ABC ein Dreieck E'BF' mit der gegebenen Eigenschaft gefunden worden.

Aufgabe 14. (Fig. 32.)

Durch einen in der Ebene des gegebenen Winkels ABC gegebenen Punkt O eine gerade Linie AC zu ziehen, welche die Schenkel AB, BC dieses Winkels in den Punkten A, C so schneide, daß das Dreieck ABC dem Quadrate der gegebenen geraden Linie Q gleich sey.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist, wenn die, durch den Punkt O der Linie BC parallel gezogene, Linie OD dem Schenkel AB in D, und die, durch den Punkt A der geraden Linie DC parallel laufende, Linie AE dem Schenkel BC in E begegnet,

$EB : BC = AB : BD$

$$\text{also } \triangle ABC \left\{ \begin{matrix} \\ Q^2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \triangle BDE \text{ (El. VI. 15.)} \\ \frac{EB.DV}{2}, \text{ wenn } DVB = R; \end{matrix} \right.$$

folglich $\frac{1}{2}DV : Q = Q : EB$;

mithin läßt sich EB, und der Punkt E finden. Ferner ist, wenn OG#AB gezogen wird,

$$OG \# BD$$

$$\text{somit } EB : BC = AB : OG$$
$$= BC : CG \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$\text{demnach } \left\{ \begin{matrix} EB : EB - BC \\ BE : EC \end{matrix} \right\} = BC : \left\{ \begin{matrix} BC - CG \\ BG \end{matrix} \right.$$

also $BC.CE = EB.BG$.

Da EB, BG gegebene Linien sind, auch BC+CE gegeben ist, so läßt sich der Punkt C finden. Es ist die Aufgabe mithin auf die andere reducirt, eine gegebene gerade Linie in einem Punkte C so zu theilen, daß das Rechteck der Segmente einem gegebenen Rectangel gleich werde, welche nach El. VI. 28, oder Dat. 85. aufgelöst werden kann.

Construction.

Man ziehe OD#BC, OG#AB, fälle auf BC das Perpendikel DV, errichte auf BC das Perpendikel MBN, verlängere, wenn es nöthig ist, OD bis zum Durchschnitte K mit BM, halbire BK in L, mache HB=a=BN, ziehe NE#HL, mache PB=BG, beschreibe über PE, EB Halbkreise, wovon jener der Linie BM in M begegne, ziehe die, der Linie BC parallele, MR, welche letzterem Halbkreise in R begegne, fälle von R das Perpendikel RC auf

Digitized by Google

BC, und ziehe durch C, O die, der Linie AB in A begegnende, gerade Linie GA, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Determination.

Damit die Linie MR dem über BE beschriebenen Halbkreise begegne, muß

$$MB \begin{cases} = \\ < \end{cases} \frac{BE}{2} \text{ seyn,}$$

$$\text{also } MB^2, EB.BP, EB.BG \begin{cases} = \\ < \end{cases} \frac{BE^2}{4}$$

$$\text{folglich } BG \begin{cases} = \\ < \end{cases} \frac{BE}{4}$$

$$\text{mithin } \triangle LB.BG, 2KB.BG, 2ODBG \begin{cases} = \\ < \end{cases} \begin{matrix} LB.BE \\ HB.BN \\ Q^2. \end{matrix} \quad \text{(El. VI. 17.)}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } 2ODBG, 2KB.BG, 4LB.BG \begin{cases} = \\ < \end{cases} \begin{matrix} Q^2 \\ HB.BN \text{ (Constr.)} \\ LB.BE \text{ (El. VI. 17.)} \end{matrix}$$

$$\text{somit } BG \begin{cases} = \\ < \end{cases} \frac{BE}{4}$$

$$\text{demnach } EB.BG, EB.BP \begin{cases} = \\ < \end{cases} \frac{BE^2}{4}$$

$$\text{(El. VI. 17.) } MB^2$$

$$\text{also } MB \begin{cases} = \\ < \end{cases} \frac{BE}{2};$$

Digitized by Google

folglich berührt, oder ſchneidet die Linie MR den Kreis über BE in einem Punkte R. Und es iſt

$$BC.CE = CR^2 = MB^2 = EB.BP = EB.BG$$

mithin $EB : CE = CB : BG$

Da $EB > CE$

ſo iſt auch $CB > BG$;

alſo liegt der Punkt C auf der Verlängerung von BG, und CO ſchneidet die Linie BA. Ferner iſt

$$EB\left\{\begin{matrix}BE-EC\\BC\end{matrix}\right\} = CB : \left\{\begin{matrix}CB-BG\\CG\end{matrix}\right. = AB : \left\{\begin{matrix}OG\\BD\end{matrix}\right.$$

ſomit $\triangle ABC = \triangle EBD$

$$\left\{\begin{matrix}\frac{EB.DV}{2}\\EB.BL\\HB.BN\\Q^2.\end{matrix}\right.$$

Zuſatz 1.

Berührt MR den Kreis über BE, ſo giebt es ein einziges Dreieck mit der gegebenen Eigenſchaft. Schneidet ſie ihn, ſo giebt es deren zwey. Der Berührungspunkt beſtimmt das kleinſte aller Dreiecke, welche die durch den Punkt O laufenden Linien bilden helfen.

Digitized by Google

Zusatz 2.

Für den Fall der Berührung ist

$$\left.\begin{array}{l} Q^2 \\ \triangle ABC \\ \triangle DBE \\ \frac{BE}{2}.DV \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2.ODBG \\ 2.BG.DV \end{array}\right.$$

also $BE = 4BG$

folglich $BC = 2BG$.

Aufgabe 15. (Fig. 33.)

Ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben, dessen eine Spitze in dem gegebenen Punkte A liege, und übrige Winkelpunkte auf den, der Lage nach gegebenen, geraden Linien BD, CE sich befinden.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist, wenn ein Kreis um dasselbe beschrieben wird, welcher die Linie BD in D, CE in E schneide, und wenn die geraden Linien AD, AE gezogen worden sind, ADB=ACB, AEC=ABC, also sind die Winkel ADB, AEC gegeben, mithin lassen sich die Punkte D, E finden, es läßt sich somit der durch die Punkte A, D, E laufende Kreis construiren, dessen Durchschnittspunkte mit den Linien DB, CE die Punkte B, C bestimmen.

Construction.

Man lege an die Linien BD, CE die Linien AD, AE so, daß sie mit denselben Winkel $= \frac{2}{3}R$ bilden, beschreibe

durch die Punkte A, D, E einen Kreis, welcher die Linien BD, CE in B, C schneide, und ziehe die geraden Linien AC, CB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

Es ist ACB=ADB, ABC=AEC
=⅔R =⅔R

also auch CAB=⅔R, mithin das Dreieck gleichseitig.

Zusatz.

Es erhellet von selbst, daß man ein zweites Dreieck AB'C' mit den gegebenen Eigenschaften findet, wenn man auch die Linien AD', AE' unter den gegebenen Winkeln an die gegebenen Linien legt.

Aufgabe 16. (Fig. 34.)

Ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben, dessen Spitze in dem gegebenen Punkte A, und von den übrigen Winkelpunkten der eine auf dem Umfange eines gegebenen Kreises, dessen Mittelpunkt in B sey, der andere auf der gegebenen geraden Linie DD' liege.

Analysis.

Es sey ADE das gesuchte Dreieck, so ist, wenn man den Winkel BAC dem Winkel BAE, die Linie AC der Linie AB gleich macht, sowohl CD=BE, als BAC=DAE=⅔R, mithin auch ACB=ABC=⅔R, folglich ist das Dreieck ABC gleichseitig, also der Punkt C gegeben, demnach liegt der Punkt D auf dem Umfange eines gegebenen Kreises, läßt sich mithin, weil er auch auf der gegebenen Linie DD' liegt, und mit ihm Dreieck ADE, finden.

Digitized by Google

Construction.

Man construire über der geraden Linie AB ein gleichseitiges Dreieck ACB, beschreibe aus C, als Mittelpunkte, mit einem Radius = dem Radius des gegebenen Kreises, einen Kreis, welcher die gegebene Linie DD' in D erreiche, und lege an den gegebenen Kreis die gerade Linie AE= AD, so ist ADE das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit der aus C, als Mittelpunkte, beschriebene Kreis die Linie DD' erreiche, muß das von dem Punkte C auf die Linie DD' gefällte Perpendikel CH $\leqq$ seyn, als der Radius des gegebenen Kreises.

Beweis.

Da das Perpendikel CH nicht größer ist, als der gegebene Radius, so erreicht der aus C, als Mittelpunkte, beschriebene Kreis die Linie DD' in einem Punkte D. Da von den drey Linien AD, DC, CA je zwey zusammen genommen größer sind, als die dritte, und AB=AC ist, so erreicht der aus A, als Mittelpunkte, mit dem Radius AD beschriebene Kreis den gegebenen in einem Punkte E. Wird BE gezogen,

so ist $\triangle BAE \cong \triangle DAC$

also BAE=DAC

folglich $\left.\begin{matrix} BAE+EAC \\ BAC \\ \frac{2}{3}R \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} DAC+CAE \\ DAE \end{matrix}\right.$

mithin auch ADE = $\frac{2}{3}$R
= AED;
demnach ist DAE ein gleichseitiges Dreieck.

Zusatz 1.

Wenn der aus C, als Mittelpunkte, beschriebene Kreis die Linie DD′ berührt, so giebt es ein einziges, wenn er sie schneidet, ein zweites Dreieck AD′E′ mit den gegebenen Eigenschaften, wie von selbst erhellet.

Zusatz 2.

Construirt man auch auf der anderen Seite der Linie AB ein gleichseitiges Dreieck AC′B, so giebt es, je nachdem ein aus C′, als Mittelpunkte, mit dem Radius des gegebenen Kreises beschriebener Kreis die Linie berührt, oder schneidet, auch auf dieser Seite ein Dreieck, oder zwey, mit den gegebenen Eigenschaften.

Anmerkung 1.

Wenn statt der Linie DD′ ein zweiter Kreis gegeben wäre, so ließe sich auf demselben Wege ein gleichseitiges Dreieck beschreiben, dessen Spitze in A liege, und übrige Winkelpunkte auf den gegebenen Kreisumfängen sich befinden.

Anmerkung 2.

Es erhellet von selbst, daß die Aufgaben eben so aufgelöst werden könnten, wenn das Dreieck nicht gerade ein gleichseitiges, sondern überhaupt ein, einem gegebenen ähnliches, werden soll.

Digitized by Google

Aufgabe 17. (Fig. 35.)

Durch den Durchschnitt zweier gegebenen Kreise eine gerade Linie zwischen die Peripherieen zu legen, daß das Verhältniß der Sehnen dem gegebenen Verhältnisse $p : q$ gleich sey.

Analysis.

Es sey DE die gesuchte Linie, also $DA : AE = p : q$, so ist, wenn die Perpendikel BF, CG auf DE gefällt werden,

$$\left.\begin{array}{l} FA : AG \\ BH : HC \end{array}\right\} = p : q \qquad \text{wenn } AH \# BF;$$

folglich ist der Punkt H, die gerade Linie HA, und die darauf perpendikular stehende Linie DE gegeben.

Construction.

Man lege durch B, C die Parallelen BP, CQ, auf verschiedenen Seiten der geraden Linie BC, ziehe die, die Linie BC in H schneidende, gerade Linie PQ, verbinde H mit A durch die gerade Linie HA, und richte auf derselben das Perpendikel DA auf, welches die Kreisumfänge in D, E schneide, so ist DE die gesuchte Linie.

Beweis.

Es ist, wenn man die Perpendikel BF, CG auf die Linie DE fällt,

$$\left.\begin{array}{l} FA : AG \\ DA : AE \end{array}\right\} \begin{array}{l} = BH : HC \\ = BP : CQ \\ = p : q. \end{array}$$

Zusatz.

Nimmt man auf der anderen Seite der Linie BC die Linie $CQ' = q$, zieht $Q'P$, welche der verlängerten CB in

H' begegne, verbindet H' mit A durch die gerade Linie H'A, und richtet auf derselben das Perpendikel AE' auf, welches den Kreisumfängen in D', E' begegne, so ist

$$\left.\begin{array}{l} BH' : H'C \\ BP : CQ' \\ p : q \end{array}\right\} = F'A : AG' = DA' : A'E';$$

also ist eine zweite Linie D'E' durch den Punkt A mit der gegebenen Eigenschaft zwischen die Peripherieen gelegt.

Aufgabe 18. (Fig. 36.)

Durch den Durchschnitt B zweier gegebenen Kreise eine gerade Linie ED= der gegebenen geraden Linie d zwischen die Peripherieen zu legen.

Analysis.

Es sey DE die gesuchte Linie. Verbindet man den Punkt A mit den Punkten D, E, B durch die geraden Linien AD, AE, AB, legt in B an den einen Kreis eine Tangente BC, welche den anderen in C schneide, und zieht die gerade Linie AC, so ist

EDA=BCA (El. III. 21.), CBA=DEA (El. III. 32.)

also $\triangle EDA \sim \triangle ABC$

folglich CB : BA=DE : EA ;

mithin ist, weil CB, BA, DE gegebene Linien sind, EA, somit der Punkt E, und die Lage der geraden Linie EA gegeben.

Construction.

Man ziehe die gerade Linie AB, lege in B an den Kreis ABE die Tangente BC, nehme CL=d, ziehe die

geraden Linien AC, LM einander parallel, wovon letztere die Linie AB in M schneide, beschreibe aus A, als Mittelpunkte, einen Kreis mit einem Radius =AM, welcher den Kreis ABE in E erreiche, und ziehe die, den Kreis ABD in D schneidende, gerade Linie EB, so ist DE die gesuchte Linie.

Determination.

Damit der aus A, als Mittelpunkte, beschriebene Kreis den Kreis ABE erreiche, muß $AM \begin{cases} = \\ < \end{cases}$ als der Durchmesser AO desselben seyn, also

$$\left.\begin{matrix} CL : AM \\ CB : BA \end{matrix}\right\} \begin{cases} = \\ > \end{cases} d : AO.$$

Beweis.

Es ist $\left.\begin{matrix} CB : BA \\ CL : AM \end{matrix}\right\} \begin{cases} = \\ > \end{cases} d : AO$ (Det.)

folglich $AM \begin{cases} = \\ < \end{cases} AO$;

mithin erreicht der Umfang des Kreises, welcher A zum Mittelpunkte hat, den Umfang ABO berührend, oder schneidend. Geschieht es in E, so ist, wenn die Verbindungslinien gezogen werden,

$$\triangle ABC \backsim \triangle DEA$$

somit $\left.\begin{matrix} CB : BA \\ CL : AM \end{matrix}\right\} = DE : EA$

demnach $\left.\begin{matrix} CL \\ d \end{matrix}\right\} = DE.$

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, daß es im Fall der Berüh-

Digitized by Google

rung eine einzige, im Fall des Durchschnittes eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft giebt.

Zusatz 2.

Da dem größten Werthe von AE der größte Werth von d entspricht, so ist die, von O durch B gezogene, gerade Linie OQ die größte von allen, welche zwischen beide Peripherieen gelegt werden können, die von einem, dem Punkte O näher liegenden, Punkte der Peripherie ABO auslaufende größer, als die entferntere, auch sind von letzteren je zwey und zwey einander gleich.

Aufgabe 19. (Fig. 37.)

Ein Rechteck zu beschreiben, dessen Diagonale der gegebenen geraden Linie d, und Fläche dem Quadrate der gegebenen geraden Linie a gleich sey.

Analysis.

Es sey ACBK das gesuchte Rechteck, so ist

$$\left.\begin{matrix} AC.CB \\ AB.CL \end{matrix}\right\} = a^2 \quad \text{wenn } ALC = R;$$

folglich $AB : a = a : CL$;

mithin ist CL der Größe nach gegeben, demnach liegt der Punkt C auf einer, der Linie AB parallelen, geraden Linie, welche sich finden läßt. Da ACB=R, so liegt derselbe Punkt auf dem Umfange des über AB, als Durchmesser, beschriebenen Kreises. Er läßt sich also finden, und das Rechteck kann construirt werden.

Construction.

Man nehme AB=d, errichte auf AB das Perpendi-

Digitized by Google

kel GAE, mache AE=a, nehme auch auf der Verlängerung von BA die FA=a, ziehe die gerade Linie BE, derselben die Linie FG parallel, lege durch den Durchschnitt G derselben mit AG die Linie GC der Linie AB parallel, beschreibe über AB einen Halbkreis, welcher der Linie GC in C begegne, ziehe die Linien AC, CB, und denselben die Linien BK, KA parallel, so ist ACBK das gesuchte Rectangel.

Determination.

Damit die Linie GC dem Kreisumfange begegne, muß, wenn der Halbmesser MD perpendikular auf AD gelegt wird, seyn

$$AG \begin{cases} < \\ = \end{cases} \begin{cases} MD \\ \frac{1}{2}AB \end{cases}$$

$$\text{also } \begin{matrix} a \\ FA \\ BA \\ d \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} : AG \\ \\ : AE \\ : a \end{matrix} \right\} \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} a : \begin{cases} \frac{1}{2}AB \\ \frac{1}{2}d \end{cases} \quad \text{(El. VI. 4.)}$$

$$\text{folglich } \begin{matrix} \frac{1}{2}d^2 \\ AD^2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} a^2$$

$$\text{mithin } AD \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} a.$$

Beweis.

$$\text{Es ist (Det.) } AD \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} a$$

$$\text{somit } \begin{matrix} AD^2 \\ \frac{1}{2}d^2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} a^2$$

Digitized by Google

$$\text{demnach } \left.\begin{array}{r} d : a \\ BA : AE \\ \left.\begin{array}{r} FA \\ a \end{array}\right\} : AG \end{array}\right\} \overset{=}{>} a : \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}d \\ \tfrac{1}{2}AB \end{array}\right.$$

$$\text{also } AG \overset{=}{<} \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}AB \\ MD; \end{array}\right.$$

mithin berührt, oder schneidet die Linie GC den Kreisumfang in einem Punkte C.

$$\text{Da } BA : \left\{\begin{array}{l} AE = FA \\ a = a \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} AG \\ CL \end{array}\right.$$

$$\text{so ist } \left.\begin{array}{r} BA.CL \\ AC.CB \end{array}\right\} = a^2.$$

Zusatz.

Es erhellet von selbst, daß es im Fall der Berührung ein einziges, im Fall des Schneidens ein zweites Rechteck mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Aufgabe 20. (Fig. 38.)

Durch einen, innerhalb eines gegebenen Kreises, gegebenen Punkt C eine Sehne in den Kreis zu legen, deren Segmente GC, CF sich, wie die gegebenen Linien p, q, verhalten.

Analysis.

Es sey FG die gesuchte Sehne, also $GC:CF = p:q$,

$$\text{so ist } \left.\begin{array}{r} GC.CF \\ AC.CB \\ CL^2 \end{array}\right\} : CF^2 = p:q \quad \begin{array}{l} \text{(El. VI. 1.)} \\ \text{(El. III. 35.), wenn AB ein Durchmesser ist;} \\ \text{(El. VI. 8. 17.), wenn } ACL = R; \end{array}$$

Digitized by Google

=LC:CH, wenn CH so bestimmt wird,
daß p:q=LC:CH;
=LC²:LC.CH (El. VI. 1.)

---

also $CF^2 = LC.CH$

---

folglich LC:CF=FC:CH;
mithin ist CF der Länge nach, somit der Punkt F, und die Lage der Sehne GF gegeben.

Construction.

Man ziehe den Durchmesser AB, errichte auf demselben das Perpendikel LC, schneide PC=p, CQ=q, auf verschiedenen Seiten des Punktes C, von der Linie AB ab, ziehe die gerade Linie LP, die Linie QH∥LP, beschreibe über LH einen Halbkreis, welcher der Linie AB in K begegne, aus C, als Mittelpunkte, mit CQ, als Radius, einen Kreis, welcher dem gegebenen Kreise in F begegne, und ziehe die gerade Linie CF, so ist FG die gesuchte Sehne.

Determination.

Damit der aus C, als Mittelpunkte, beschriebene Kreis dem gegebenen begegne, muß

$$KC \gtreqless CA, \quad KC \gtreqless CB \text{ seyn;}$$

$$\text{also } KC^2 \left\{ \begin{matrix} \\ LC.CH \end{matrix} \right\} \gtreqless CA^2, \quad KC^2 \left\{ \begin{matrix} \\ LC.CH \end{matrix} \right\} \gtreqless CB^2$$

$$\text{mithin } \left\{ \begin{matrix} LC^2 : LC.CH \\ LC : CH \\ PC : CQ \\ p : q \end{matrix} \right\} \gtreqless \left\{ \begin{matrix} AC.CB : AC^2 \\ BC : CA; \end{matrix} \right.$$

Digitized by Google

$$\text{und } \left.\begin{matrix} LC^2 : LC.CH \\ LC : CH \\ p : q \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \left\{\begin{matrix} AC.CB : CB^2, \\ AC : CB. \end{matrix}\right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix} p : q \\ PC : CQ \\ LC : CH \\ LC^2 : LC.CH \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \left\{\begin{matrix} BC : CA \\ AC.CB : CA^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} LC.CH \\ CK^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} CA^2$$

$$\text{demnach } KC \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} CA.$$

$$\text{Eben so } \left.\begin{matrix} p : q \\ LC^2 : LC.CH \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \left\{\begin{matrix} AC : CB \\ AC.CB : BC^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} LC.CH \\ CK^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} BC^2$$

$$\text{demnach } KC \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} CB;$$

folglich erreicht der aus C, als Mittelpunkte, beschriebene Kreis den gegebenen. Geschieht es in A, oder B, so ist AB die gesuchte Sehne, wie von selbst erhellet. Geschieht es in F, so ist $LC : \left\{\begin{matrix} CK = KC \\ CF = FC \end{matrix}\right\} : CH$

$$\text{also } CF^2 = LC.CH$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} LC^2 \\ AC.CB \\ FC.CG \\ GC : CF \end{matrix}\right\} : CF^2 \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} LC^2 : LC.CH \\ LC : CH \\ PC : CQ \\ p : q. \end{matrix}\right.$$

Digitized by Google

Zusatz.

Schneiden sich beide Kreise, so giebt es, wie sich von selbst ergiebt, eine zweite Sehne mit der gegebenen Eigenschaft.

Aufgabe 21. (Fig. 39.)

Durch einen, zwischen zwey gegebenen concentrischen Kreisen, gegebenen Punkt O eine gerade Linie zwischen die Umfänge zu legen, deren, durch jenen Punkt bestimmte, Segmente PO, OQ in dem Verhältnisse der gegebenen geraden Linien p, q stehen.

Analysis.

Es sey PQ die gesuchte Linie, so ist, wenn der Mittelpunkt M durch die gerade Linie PM mit P verbunden, und QL derselben parallel gezogen wird, bis sie der geraden Linie MO in ihrer Verlängerung in L begegnet, $PO : OQ \left.\begin{matrix} \\ p : q \end{matrix}\right\} = MO : OL = PM : QL$, also sind die Linien OL, LQ der Größe nach gegeben. Da auch OL der Lage nach gegeben ist, so ist der Punkt L, somit die Lage der geraden Linie LQ, der Punkt Q, die gerade Linie OQ gegeben.

Construction.

Man ziehe die gerade Linie MO, schneide auf einer beliebigen geraden Linie MK die Linien MH, HK, den Linien p, q gleich ab, mache die Linie KL der Linie HO, die Linie LD der Linie MH parallel, und ziehe EO, welche der Linie LD in D begegne, beschreibe aus L, als Mittelpunkte, mit einem Radius =LD, einen Kreis, welcher

Digitized by Google

dem größeren der gegebenen Kreiſe in Q begegne, und verknüpfe Q mit O durch die gerade Linie QO, welche das Verlangte leiſten wird.

Determination.

Damit der Kreis, deſſen Mittelpunkt L iſt, dem größeren Kreiſe begegne, muß

$$DL \gtreqless LG \text{ ſeyn;}$$

$$\text{alſo } ME : LD \left\{ \begin{matrix} p.ME \\ q.ME \end{matrix} \right\} \gtreqless \left\{ \begin{matrix} ME : LG \\ p.ME : p.LO - OG \\ q.MO - p.OG \end{matrix} \right.$$

$$\text{folglich } q.ME \gtreqless q.MO - p.OG$$

$$\text{mithin } p.OG \gtreqless \left\{ \begin{matrix} q(OM - ME) \\ q.FO \end{matrix} \right.$$

$$\text{ſomit } p : q \gtreqless FO : OG.$$

Beweis.

$$\text{Es iſt } p : q \gtreqless FO : OG$$

$$\text{alſo } p.OG \gtreqless \left\{ \begin{matrix} q.FO \\ q(OM - MF) \end{matrix} \right.$$

$$\text{folglich } \left\{ \begin{matrix} q.MF \\ q.ME \end{matrix} \right\} \gtreqless \left\{ \begin{matrix} q.MO \\ p.LO \end{matrix} \right\} - p.OG$$

$$\text{mithin } p.ME : \left\{ \begin{matrix} q.ME \\ p.LD \\ ME : LD \end{matrix} \right\} \gtreqless \left\{ \begin{matrix} p.ME : p.(LO - OG) \\ ME : LO - OG \\ LG \end{matrix} \right.$$

Digitized by Google

somit $LD \overset{=}{>} LG$;

demnach erreicht der Kreis, welcher L zum Mittelpunkte hat, den größeren, und es ist, wenn $MP \# LQ$ gezogen wird, $\left.\begin{matrix} MO : OL \\ ME : LD \end{matrix}\right\} = MP : LQ$

also $ME = MP$;

folglich liegt der Punkt P auf dem Umfange des kleineren Kreises. Auch ist $PO : OQ = MO : OL$
$= MH : HK$
$= p : q$.

Zusatz.

Es erhellet von selbst, daß es, wenn der Kreis, welcher L zum Mittelpunkte hat, den anderen berührt, oder schneidet, eine Linie, oder zwey, mit der gegebenen Eigenschaft giebt.

Aufgabe 22. (Fig. 40.)

Ein Dreieck zu beschreiben, von welchem der Winkel der Spitze einem gegebenen Winkel, und die Summe der Grundlinie und des einen Schenkels der gegebenen geraden Linie a, die Summe der Grundlinie und des anderen Schenkels der gegebenen geraden Linie b gleich sey.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck. Macht man $DB = BC$, $EC = CB$, zieht die gerade Linie DC, nimmt $AF \# BC$, bezeichnet den Durchschnitt der Linien DC, AF mit F, und legt die, den Schenkel AE in G schneidende, Linie FG der Linie FD parallel, so ist

Digitized by Google

sowohl $DB:BC=DA:AF$, als auch $GE:EC=FD:DC$
$=AD:DB$

also $DA=AF$;

folglich $GE=AD$;

mithin ist der Punkt G, somit die Lage der Linie GF, folglich der Punkt F, demnach der Punkt C, und die Lage der Linie BC gegeben.

Construction.

Man mache DAE gleich dem gegebenen Winkel, $DA=a$, $EA=b$, ziehe die gerade Linie DE, nehme $EG=AD$, $GF \# ED$, beschreibe aus A, als Mittelpunkte, mit einem Radius $=AD$ einen Kreis, welcher die Linie GF in F erreiche, verbinde die Punkte D, F durch die gerade Linie DF, welche AE in C schneide, und lege die Linie CB der Linie AF parallel, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit der auf A, als Mittelpunkte, beschriebene Kreis die Linie GF erreiche, muß $AD \overset{=}{>} AH$ seyn, wenn AH auf FG perpendikular gezogen ist;

$$\text{also } \left.\begin{matrix} AD \\ a \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} AG.\sin.AGH \\ (AE-EG)\ \sin.AED \\ (EA-AD)\ \sin.E \\ (b-a).\ \sin.E \end{matrix}\right.$$

folglich $a(1+\sin.E) \overset{=}{>} b.\ \sin.E$

$$\text{mithin } a : b \gtreqless \begin{cases} \sin.E : (1+\sin.E) \\ 1 : \dfrac{1+\sin.E}{\sin.E} \\ 1 : \dfrac{2(\sin.(45°+\frac{1}{2}E))^2.}{\sin.E} \end{cases}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } a : b \gtreqless 1 : \frac{2(\sin.(45° + \frac{1}{2}E))^2}{\sin.E}$$

demnach $AD \gtreqless AK$, wie aus der Determination hervorgehet, also erreicht der Kreis die Linie GF in einem Punkte F. Und es ist

$$DB : BC = DA : AF$$

folglich $DB = BC$

demnach $AB + BC = AB + BD$
$= AD$
$= a.$

Auch ist $GE : EC = FD : DC$
$= AD : DB$

mithin $EC = DB = BC$

somit $AC + CB = AC + CE$
$= b.$

Zusatz 1.

Schneidet der Kreis die Linie GF, so geschieht es in einem zweiten Punkte F'. Zieht man auch F'D, und schneidet deren Verlängerung die Verlängerung von AE

Digitized by Google

in einem Punkte C', zieht man auch die gerade Linie AF', derſelben parallel die Linie C'B', ſo iſt

ſowohl DB':B'C' = DA:AF'

alſo DB' = B'C'

folglich AB'—B'C' = AB'—B'D
= AD
= a;

als auch GE:EC' = F'D:DC'
= AD:DB'

mithin EC' = DB' = B'C'

ſomit AC'—C'B' = AC'—C'E
= AE
= b.

Es iſt demnach ein Dreieck gefunden worden, in welchem der Winkel der Spitze einem gegebenen Winkel gleich iſt, und die Ueberſchüſſe der Schenkel über die Grundlinie den gegebenen Linien a, b gleich ſind.

Zuſatz 2.

In dieſer Aufgabe liegt zugleich die Auflöſung der anderen Aufgabe: von den Endpunkten der Grundlinie eines gegebenen Dreieckes aus, auf den Schenkeln, oder ihren Verlängerungen, gleiche Segmente in der Art abzuſchneiden, daß die Verbindungslinie ihrer Endpunkte jenen Segmenten gleich ſey.

Zuſatz 3.

Sollte die Verbindungslinie in irgend einem anderen, aber gegebenen, Verhältniſſe zu den gleichen Seg-

Digitized by Google

menten stehen, so würde eine ganz ähnliche Behandlung zur Auflösung führen.

Aufgabe 23. (Fig. 41.).

Durch einen gegebenen Punkt A eine gerade Linie AGF zu ziehen, daß die zwischen diesen Punkt, den gegebenen Kreisumfang FEH, und die gegebene gerade Linie CN fallenden Segmente FA, AG ein dem gegebenen Verhältnisse p:q gleiches Verhältniß zu einander haben.

Analysis.

Es seyen FA, AG die gesuchten Segmente, so ist, wenn des Kreises Mittelpunkt D mit F durch die gerade Linie FD verbunden, und GO der Linie FD parallel gezogen, auch die, die Linie GO in O schneidende, gerade Linie AD gezogen wird, sowohl

DA:AO=FA:AG, als FD:OG=FA:AG (El. VI. 4.)

=p:q =p:q;

also sowohl AO, als OG der Größe nach gegeben. Da auch AO der Lage nach gegeben ist, so ist der Punkt O gegeben, mithin liegt der Punkt G auf einem gegebenen Kreisumfange. Da er auch auf der Linie CN liegen soll, so läßt er sich finden.

Construction.

Man ziehe DP#CN, mache DP=p, PQ=q, ziehe die geraden Linien PA, ACD, QO#PA, OK#CN, verknüpfe den Endpunkt H des Radius DH mit A durch die, die Linie OK in K schneidende, gerade Linie AH, beschreibe aus dem Durchschnitte O der Linien AD, QO

Digitized by Google

einen Kreis mit einem Radius =OK, welcher der Linie CN in G begegne, und ziehe die gerade Linie AG, so ist dieselbe die verlangte.

Determination.

Damit der Kreis, welcher O zum Mittelpunkte hat, der Linie CM begegne, muß, wenn OI perpendikular auf CN gefällt ist, $OK \overline{\overline{>}} OI$

also $p.OK \overline{\overline{>}} p.OI$ seyn.

Es ist $DA:AO = DP:PQ$, und $DH:OK = DA:AO$
$= p:q$ $= p:q$

folglich $p.AO = q.AD$, und $p.OK = q.DH$.

Auch ist, wenn, wie hier zur Vereinfachung vorausgesetzt werden soll, $p:q \left\{ > DA:AC \right.$
$DA:AO \left. \right\}$

mithin $AO < AC$ ist,
$CO = CA - AO$

somit $p.CO = p.(CA - AO)$

demnach $p.CO \sin.C \left\{ = p(CA - AO) \sin.C \right.$
$p.OI \left\{ = p.CA.\sin.C - \left\{ \begin{matrix} p.AO.\sin.C \\ q.AD.\sin.C \end{matrix} \right. \right.$

also muß seyn $q.DH \overline{\overline{>}} p.CA.\sin.C - q.AD.\sin.C$

folglich $q(DH + AD.\sin.C) \overline{\overline{>}} p.CA.\sin.C$

mithin $p:q \overline{\overline{<}} DH + \left\{ \begin{matrix} AD.\sin.C \\ AM \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} AC.\sin.C \\ AN, \end{matrix} \right.$

wenn $AMD = R = CNA$.

Digitized by Google

Beweis.

Es ist $p : q \gtrless DH + \begin{cases} AM \\ AD.\sin C \end{cases} : \begin{cases} AN \\ AC.\sin C \end{cases}$

folglich $q(DH + AD.\sin C) \gtrless p.AC.\sin C$

mithin $q.DH \begin{cases} = \\ > \end{cases} \begin{cases} p.AC.\sin C - \begin{cases} q.AD.\sin C \\ p.AO.\sin C \end{cases} \text{(Det.)} \\ p(CA - AO)\sin C \\ p.CO.\sin C, \text{ weil } AO < AC \text{ (Det.)} \\ p.OI \end{cases}$

$p.OK$

somit $OK \gtrless OI$;

demnach erreicht der aus O, als Mittelpunkte, beschriebene Kreis die Linie CN. Geschieht es in G, und zieht man die, die verlängerte AG in F schneidende, Linie DF, so ist $DF : OG = DA : AO$
$= HD : OK$

also $DF = DH$;

mithin liegt der Punkt F auf dem Umfange des aus D, als Mittelpunkte, beschriebenen Kreisumfanges.

Auch ist $FA : AG = DA : AO$
$= DP : PQ$
$= p : q.$

Zusatz.

Es erhellet von selbst, daß es im Fall der Berührung des aus O, als Mittelpunkte, beschriebenen Kreises mit der Linie CN eine einzige, des Schneidens eine zweite Linie mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Digitized by Google

Aufgabe 24. (Fig. 42.)

Von einem, auf der Verlängerung der geraden Linie, welche die Mittelpunkte H, L zweyer der Größe und Lage nach gegebenen Kreise verknüpfet, gegebenen Punkte A aus eine gerade Linie AG durch die Kreise zu ziehen, deren zwischen jenen Punkt und die Kreise fallende Segmente ein Verhältniß zu einander haben, welches dem der gegebenen geraden Linien p, q gleich sey.

Analysis.

Es seyen GA, AF die gesuchten Segmente, so ist, wenn GH gezogen wird, und die, durch F mit der Linie GH parallel laufende, Linie die Linie AG in K schneidet, sowohl HA:AK=GA:AF = p:q; als auch GH:FK=GA:AF = p:q; mithin sind AK, KF der Größe nach gegeben. Da AH auch der Lage nach gegeben ist, so ist der Punkt K gegeben, also liegt der Punkt F auf einem, aus dem gegebenen Punkte K, als Mittelpunkte, mit der gegebenen Linie KF, als Radius, beschriebenen, Kreisumfange, ist somit, weil er auch auf dem aus L, als Mittelpunkte, beschriebenen Kreisumfange liegen soll, gegeben, und die gerade Linie AF gefunden.

Construction.

Man mache AHP=R, HP=p, PQ=q, ziehe die gerade Linie AP, derselben die, die Linie AG in K schneidende, Linie QK parallel, verknüpfe den Punkt A mit dem Endpunkte O des Radius HO, lege der Linie HP die Linie KU parallel, welche die Linie AO in U schneide,

Digitized by Google

beſchreibe aus K, als Mittelpunkte, mit KU, als Radius, einen Kreis, welcher den aus L, als Mittelpunkte, beſchriebenen in F erreiche, und ziehe die gerade Linie AF, ſo iſt dieſelbe die geſuchte.

Determination.

Damit die, aus den Mittelpunkten K, L beſchriebenen, Kreiſe einander erreichen, muß, wenn $p:q \left\{ \begin{matrix} > HA:AL \\ HA:AK \end{matrix} \right.$

alſo $KA < KL$, *wie*

hier zur Vereinfachung vorausgeſetzt wird, ſeyn entweder $UK+LB=LK$, oder $KL+LB=UK$, oder $KL+UK=LB$, oder es muß zugleich ſowohl $UK+LB > LK$, als $KL+LB > UK$, und $KL+UK > LB$ ſeyn, das iſt, wenn die Radien der gegebenen Kreiſe mit R, r bezeichnet werden,

entweder $UK+r=LA-AK$

folglich $\left. \begin{matrix} p.UK \\ q.R \end{matrix} \right\} +p.r=p.LA- \left\{ \begin{matrix} p.AK \\ q.HA \end{matrix} \right.$

mithin $q(R+HA)=p(LA-r)$

ſomit $p:q= \left\{ \begin{matrix} R+AH:LA-r \\ EA:AB; \end{matrix} \right.$

oder $LA-AK+r=UK$

folglich $p.LA- \left\{ \begin{matrix} p.AK \\ q.AH \end{matrix} \right\} +p.r= \left\{ \begin{matrix} p.UK \\ q.R \end{matrix} \right.$

mithin $p(LA+r)=q(AH+R)$

ſomit $p:q=AH+R:LA+r$
$=EA:AC;$

Digitized by Google

oder LA—AK+UK=r

folglich p.LA—{p.AK / q.HA}+{p.UK / q.R}=pr

mithin p(LA—r)=q(HA—R)

somit p : q=HA—R : LA—r
=DA : AB;

od. zugleich UK+r>LA—AK

folgl. p.UK / q.r }+p.r>pLA—{p.AK / q.AH, weil HP:PQ}=HA:KA
p:q }=HO:KU

mithin q(R+AH)>p(LA—r)

somit p : q<{R+AH : LA—r / EA : AB;

und LA—AK+r>UK

folglich p.LA—{p.AK / q.AH}+p.r>{p.UK / q.R}

mithin p(LA+r)>q(R+AH)

somit p : q>{R+AH : LA+r / EA : AC;

und LA—AK+UK>r

folglich p.LA—{p.AK / q.HA}+{p.UK / q.R}>p.r

mithin p(LA—r)>q(HA—R)

somit p : q>{HA—R : LA—r / DA : AB.

Digitized by Google

Da in letzterem Falle $p : q > EA : AC$, $p : q > DA : AB$ werden muß, so braucht nur $p : q$ größer, als das eine von diesen Verhältnissen, wenn sie gleich sind, oder größer, als das größere derselben, wenn sie ungleich sind, zu seyn.

Ob $EA : AC \gtreqless DA : AB$ sey, hangt davon ab, ob

$EA : AD \gtreqless CA : AB$

oder $EA - AD : ED \gtreqless \left\{\begin{matrix} CA - AD \\ CB \end{matrix}\right\} : BA$

oder $E \left\{\begin{matrix} CB \\ DE : BL \\ DM : BN \\ DV : VB \end{matrix}\right\} \gtreqless DA : AB$

wenn DM#BN, DM=DH, BN=BL gemacht wird; wenn MN der verlängerten DB in V begegnet;

oder $DV - VB : DB \gtreqless \left\{\begin{matrix} DA - AB \\ DB \end{matrix}\right\} : BA$

oder $BV \lesseqgtr BA$ ist.

Beweis.

Ist $p : q = EA : AB$, oder $p : q = EA : AC$, oder $p : q = DA : AB$, so ist, wie aus der Determination erhellet,

Digitized by Google

UK+LB=LK, oder KL+LB=UK, oder KL+UK=LB, alſo berührt der aus K, als Mittelpunkte, beſchriebene Kreis den aus L, als Mittelpunkte, beſchriebenen, und es ſind, wie von ſelbſt erhellet, EA, AB, oder EA, AC, oder DA, AB die geſuchten Segmente.

Iſt p:q> DA:AB / HA—R:LA—r

ſo iſt p.LA—p.r>q.HA—q.R

alſo p.LA—(q.HA / p.AK) + (q.R / p.UK) >p.r

folglich LA—AK / LK +UK >r.

Iſt, wie im vorliegenden Falle, VB>BA,
ſo iſt DB:BV>DB:BA

alſo DV:VB / DM:BN / DH:BL / DE:BC <DA:AB

folglich ED:DA<CB:BA

mithin EA:AD<CA:AB

ſomit EA:AC<DA:AB

demnach p:q> EA:AC / R+AH:r+LA

alſo p.LA+p.r>q.R+q.AH

Digitized by Google

folglich $p.LA - \begin{Bmatrix} q.AH \\ p.AK \end{Bmatrix} + p.r > \begin{Bmatrix} q.R \\ p.UK \end{Bmatrix}$

mithin $p.(LK + r) > p.UK$

somit $LK + r > UK$.

Da auch $p : q < EA : AB$

so ist $\begin{Bmatrix} p.AB \\ p.(LA - r) \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} q.EA \\ q.(HA + R) \end{Bmatrix}$

also $p.LA - \begin{Bmatrix} q.AH \\ p.AK \end{Bmatrix} < \begin{Bmatrix} q.R \\ p.UK \end{Bmatrix} + p.r$

folglich $\begin{matrix} LA - AK \\ LK \end{matrix} \Big\} < UK + r.$

Demnach schneiden die Kreise einander in einem Punkte F. Zieht man HG ∥ KF, so ist

$GH : KF = HA : AK$
$= HP : PQ$
$= HO : KU$

also $GH = HO$;

mithin liegt der Punkt G auf dem Umfange des aus H, als Mittelpunkte, beschriebenen Kreises.

Auch ist $GA : AF = HA : AK$
$= p : q.$

Zusatz.

Es erhellet von selbst, daß es im Fall des Durchschneidens der aus K und L, als Mittelpunkten, beschriebenen Kreises eine zweite Linie mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Digitized by Google

Aufgabe 25. (Fig. 43. a.)

Ein Dreieck zu beschreiben, von welchem die Grundlinie, und die Radien der um und in das Dreieck zu beschreibenden Kreise den gegebenen geraden Linien 2g, R, r gleich seyen.

Erste Analysis.

Es sey ABC das verlangte Dreieck, so ist, wenn ein Kreis um dasselbe beschrieben wird, wegen der gegebenen Grundlinie BC und des gegebenen Radius BD, der Punkt D, und der Winkel BDE gegeben, wenn DE perpendikular auf BC gefällt wird. Es ist also auch BAC=BDE gegeben. Ist O der Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebenen Kreises, und sind die Linien BO, CO, AO gezogen, so ist

$$BOC = A + \frac{ABC}{2} + \frac{ACB}{2} = 2R - \left(\frac{ABC}{2} + \frac{ACB}{2}\right)$$

$$= 2R - \frac{ABC + ACB + BAC}{2} + \frac{BAC}{2}$$

$$= R + \frac{BAC}{2} = R + \frac{BDE}{2};$$

demnach liegt der Punkt O auf dem Umfange eines gegebenen Kreisabschnittes. Da OM=r gegeben ist, so liegt der Punkt O auch auf einer gegebenen geraden Linie, er ist mithin gegeben. Es ist also der Kreis, dessen Mittelpunkt in O liegt, und Radius =r ist, der Größe und Lage nach, mithin sind auch die an denselben gezogenen Tangenten BA, AC, somit ist das Dreieck, gegeben.

Digitized by Google

Construction.

Man mache BC=2g, BE=EC, richte in E auf BC ein Perpendikel ED auf, lege an dasselbe die Linie BD= der gegebenen Linie R, beschreibe aus D, als Mittelpunkte, mit BD, als Radius, einen Kreis, lege an denselben die Tangente BH, halbire den Winkel CBH durch die Linie BG, welche der verlängerten DE in G begegne, beschreibe aus G, als Mittelpunkte, mit dem Radius GB, einen Kreisbogen BFC, schneide von EF die Linie EL=r ab, lege durch L der Linie BC die Linie LO parallel, welche dem Bogen BFC in O begegne, fälle von O ein Perpendikel OM auf BC, beschreibe aus O, als Mittelpunkte, mit dem Radius OM einen Kreis, und lege an denselben die Tangenten BA, AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit LO dem Bogen BOC begegne, muß seyn

$$r \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \begin{cases} EF \\ FG - GE \\ BG - GE \\ \sqrt{BE^2 + EG^2} - GE \end{cases}$$

$$\text{also } r + GE \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \sqrt{BE^2 + EG^2}$$

$$\text{folglich } r^2 : 2r.GE + EG^2 \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} BE^2 + EG^2$$

$$\text{mithin } r^2 + 2r.GE \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} BE^2$$

$$\text{somit } GE \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \frac{BE^2 - r^2}{2r}.$$

Digitized by Google

Verlängert man BH, EG bis zu ihrem Durchschnitte in K,
so ist EG : GK = EB : BL (El. VI. 3.)
= ED : DB (El. VI. 8.)

---

also $\left.\begin{matrix} EG : EG+GK \\ GE : EK \end{matrix}\right\} = ED : ED+DB$

---

folglich $GE = \frac{KE.ED}{ED+DB}$

$= \frac{BE^2}{ED+DB}$;

---

demnach muß $\left.\begin{matrix} \frac{BE^2}{ED+DB} \\ \text{d. i. } \frac{g^2}{DE+R} \end{matrix}\right\} = \text{oder} < \frac{BE^2-r^2}{2r}$ seyn,

---

mithin $\frac{2rg^2}{g^2-r^2} - R = \text{oder} < DE$

---

also $\frac{4r^2g^4}{(g^2-r^2)^2} - \frac{4Rrg^2}{g^2-r^2} + R^2 = \text{oder} < \left\{\begin{matrix} DE^2 \\ R^2-g^2 \end{matrix}\right.$

---

folglich $\frac{4Rr}{g^2-r^2} - \frac{4r^2g^2}{(g^2-r^2)^2} = \text{oder} > 1$

---

somit $4Rr = \text{oder} > \left\{\begin{matrix} \frac{(g^2-r^2)^2+4r^2g^2}{g^2-r^2} \\ \frac{(g^2+r^2)^2}{g^2-r^2} \end{matrix}\right.$

---

demnach $g^2-r^2 : g^2+r^2 = \text{oder} < g^2+r^2 : 4Rr.$

Digitized by Google

Beweis.

Es ist $g^2-r^2 : g^2+r^2 \leqq g^2+r^2 : 4Rr$

also $r \leqq EF$, wie aus der Determination hervorgeht; also erreicht die Linie LO den Kreisbogen BFC.

Auch ist $BOC = GBT+GBE = R+\frac{BDE}{2}$

also $OBC+OCB = R-\frac{BDE}{2}$

folglich $ABC+ACB = 2R-BDE$;

mithin schneiden die Tangenten BA, CA einander.

Nun ist $\left.\begin{matrix} BOC \\ R+\frac{BDE}{2} \end{matrix}\right\} = R+\frac{BAC}{2}$ (Anal.)

somit $BDE = BAC$,

demnach liegt A auf dem Umfange des Kreises vom Mittelpunkte D, und $\triangle$ BAC leistet das Verlangte.

Zusatz.

Es erhellet von selbst, daß es, im Fall der Berührung des Kreises BFC durch OL, ein einziges, im Fall des Schneidens ein zweites Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Zweite Analysis. (Fig. 43. b.)

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, D der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so ist, wenn die gerade Linie DC gezogen, und DE perpendikular auf BC gefällt

Digitized by Google

wird, △DEC der Art und Größe nach gegeben, weil die Linien DC, CE gegeben sind, also ist Winkel EDC, somit BAC(=EDC) gegeben, folglich ist das Verhältniß $(BA+AC)^2 - BC^2 : 2.\triangle ABC$ gegeben (Dat. 67.), d. i. wenn man den Radius des in das Dreieck beschriebenen Kreises durch QV bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{l}(BA+AC+CB)\ (BA+AC-CB) : (BA+AC+CB)QV \\ BA+AC-CB : QV\end{array}\right\}$$

gegeben. Da QV gegeben ist, so ist BA+AC−CB, und, weil CB gegeben ist, BA+AC gegeben, also kann das Dreieck beschrieben werden.

Construction.

Man mache BC der gegebenen Linie gleich, welcher die Grundlinie gleich werden soll, richte auf derselben in ihrem Halbirungspunkte E ein Perpendikel auf, lege an dasselbe die Linie CD= derjenigen, welcher der Radius des umschriebenen Kreises gleich werden soll, beschreibe aus C, als Mittelpunkte, einen Kreis mit dem Radius DC, halbire den Winkel CDE durch die gerade Linie DG, richte in C auf CD das Perpendikel CG auf, mache CH =2CD, CO= der Linie, welcher der Radius des in das Dreieck beschreibbaren Kreises gleich werden soll, ziehe die gerade Linie GH, und dieser die Linie OL parallel, welche der CH in L begegne, beschreibe aus B, als Mittelpunkte, mit BL, als Radius, einen Kreis, verlängere ED bis zum Durchschnitte P mit dem Umfange des um D, als Mittelpunkt, beschriebenen Kreises, ziehe die gerade Linie BP, beschreibe aus P, als Mittelpunkte, mit PB, als Radius, einen Kreis, welcher dem Kreise, dessen

Digitized by Google

Mittelpunkt in B liegt, in R begegne, ziehe die gerade Linie BR, welche den Kreis, deſſen Mittelpunkt in D liegt, in A ſchneide, und ziehe die gerade Linie AC, ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Determination.

Damit der Kreis, deſſen Mittelpunkt in P liegt, dem Kreiſe, deſſen Mittelpunkt B iſt, begegne, muß

$$BL \overline{=}_{<} BP \text{ ſeyn,}$$

$$\text{alſo } CL \overline{=}_{<} 2BP - BC$$

$$\left.\begin{matrix} \text{folglich } LC : CO \\ HC \\ 2DC \end{matrix}\right\} \overline{=}_{<} 2BP - BC : CO.$$

Es iſt $DC : CE = DE : EU$, wenn U den Durchſchnitt der Linien EC, DU bezeichnet;

$= ED + CE : CE$, weil (El. VI. 3.) $ED : DC = EU : UC$, alſo $ED + DC : ED = EU + UC : EU$.

Ferner iſt $BP^2 = BE^2 + EP^2$

$$\text{alſo } 2BP - BC = 2\sqrt{BE^2 + EP^2} - BC$$

folglich muß ſeyn

$$2(ED + DC) : CE \overline{=}_{<} 2\sqrt{RE^2 + EP^2} - BC : CO$$

$$\left.\begin{matrix} \text{mithin } ED + DC \\ PE \end{matrix}\right\} : CE \overline{=}_{<} \sqrt{RE^2 + EP^2} - CE : CO$$

$$\text{ſomit } PE.CO \overline{=}_{<} CE\sqrt{BE^2 + EP^2} - CE^2$$

Digitized by Google

demnach $\frac{PE.CO}{CE} + CE \overset{=}{<} \sqrt{BE^2 + EP^2}$

also $\frac{PE^2.CO^2}{CE^2} + 2PE.CO + CE^2 \overset{=}{<} BE^2 + EP^2$

folglich $\frac{PE.CO^2}{CE^2} + 2CO \overset{=}{<} \begin{cases} PE \\ CD+DE \end{cases}$

d. i. $\frac{(CD+DE)CO^2}{CE^2} + 2CO \overset{=}{<} \begin{cases} PE \\ CD+DE \end{cases}$

mithin $\begin{matrix} DC.CO^2 - CD.CE^2 + 2CO.CE^2 \\ 2CO.CE^2 - CD(CE^2 - CO^2) \end{matrix} \overset{=}{<} DE(CE^2 - CO^2)$

demnach $\frac{2CO.CE^2}{CE^2 - CO^2} - CD \overset{=}{<} DE$

also $\frac{4CO^2.CE^4}{(CE^2-CO^2)^2} - \frac{4CO.CD.CE^2}{CE^2-CO^2} + CD^2 \overset{=}{<} \begin{cases} DE^2 \\ CD^2 - CE^2 \end{cases}$

folglich $\frac{4CO^2.CE^2}{(CE^2-CO^2)^2} - \frac{4CO.CD}{CE^2-CO^2} + 1 \overset{=}{<} 0$

d. i. $\frac{4r^2.g^2}{(g^2-r^2)^2} - \frac{4.R.r}{g^2-r^2} + 1 \overset{=}{<} 0$

mithin $\begin{matrix} \frac{4r^2g^2 + (g^2-r^2)^2}{g^2-r^2} \\ \frac{(g^2+r^2)^2}{g^2-r^2} \end{matrix} \overset{=}{<} 4Rr$

somit $g^2 - r^2 : g^2 + r^2 \overset{=}{<} g^2 + r^2 : 4Rr.$

Digitized by Google

Beweis.

Es ist $g^2-r^2 : g^2+r^2 \gtreqless g^2+r^2 : 4Rr$ (Det.)

also $BL \gtreqless 2BP$;

wie aus der Determination hervorgeht, demnach erreicht der eine Kreis den anderen.

Ferner ist $BA+AC=BR$

$=BL$

also $BA+AC-CB=CL$

folglich $BA+AC-CB : CO$

$(BA+AC+CB)\,(BA+AC-CB) : (BA+AC+CA)CO$

$=LC : CO$

$=HC : CG$

$=2DC : CG$

$=2Rx : xA$

$=(BA+AC)^2-CB^2 : 2\triangle ABC$ (Dat. 67.)

$=(BA+CA+CB)(BA+AC-CB) : (BA+AC+CB)QV$,

wenn Q der Mittelpunkt, und QV der Radius des in das Dreieck beschriebenen Kreises ist, mithin ist CO=QV.

Da auch BC die Grundlinie, und DO der Radius des umschriebenen Kreises ist, so ist dasselbe das verlangte.

Zusatz.

Es erhellet von selbst, daß es, im Fall der Berührung der Kreise, welche B, P zu Mittelpunkten haben, ein einziges, im Fall des Schneidens ein zweites Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Digitized by Google

Aufgabe 26. (Fig. 44.)

Ein Dreieck zu beschreiben, in welchem die Grundlinie der gegebenen geraden Linie g, der Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α, die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise, welche um und in das Dreieck beschrieben werden, der gegebenen geraden Linie d gleich sey.

Analysis.

Es sey ABC das verlangte Dreieck, seyen Q, O die Mittelpunkte der um und in das Dreieck beschriebenen Kreise, so ist, wegen des gegebenen Winkels der Spitze, der Punkt Q gegeben, und wenn die gerade Linie CO gezogen, und bis zum Durchschnitte D mit dem Umfange des umschriebenen Kreises verlängert wird, der Punkt D, als Halbirungspunkt des Bogens ADB, somit auch die gerade Linie DB gegeben. Es ist

$$\begin{aligned} BOD &= BCO + OBC, \text{ wenn die gerade Linie } \left\{\begin{matrix} OB \\ AD \end{matrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{matrix} BAD \\ ABD \end{matrix}\right\} + OBA, \qquad \text{gezogen wird,} \\ &= OBD \end{aligned}$$

also $OD = DB$;

mithin liegt O auf dem Umfange des aus D, als Mittelpunkte, mit einem Radius =DB, beschriebenen Kreises. Da $QO = d$, so liegt der Punkt O auch auf dem Umfange des aus Q, als Mittelpunkte, mit einem Radius $= d$, beschriebenen Kreises, ist also gegeben. Somit ist die gerade Linie DO, der Durchschnitt C mit dem Umfange des umschriebenen Kreises, und das Dreieck ABC gegeben.

Digitized by Google

Construction.

Man beschreibe über der gegebenen geraden Linie BC=g einen des gegebenen Winkels α fähigen Kreisabschnitt, vollende den Kreis, halbire den Bogen ADB in B, ziehe die geraden Linien DB, DA, beschreibe aus D, als Mittelpunkte, mit einem Radius = einer derselben, einen Bogen ALB, welcher von dem Umfange des, aus dem Mittelpunkte Q des zuerst beschriebenen Kreises, mit einem Radius =d beschriebenen, Kreises in O erreicht werde, ziehe die gerade Linie DO, deren Verlängerung dem ersten Kreise in C begegne, und ziehe die geraden Linien AC, CB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit der Kreis, welcher Q zum Mittelpunkte und D zum Radius hat, dem Kreisbogen ALB begegne, muß

$$d < \begin{Bmatrix} QB \\ QD \end{Bmatrix}, \quad d \overset{=}{>} \begin{Bmatrix} QL \\ LD - DQ \\ BD - DQ \end{Bmatrix} \text{ seyn.}$$

Bezeichnet man den Durchschnitt der Linien BC, QD durch N, so ist

$$\begin{Bmatrix} QB : BN \\ QD : \frac{g}{2} \end{Bmatrix} = 1 : \begin{Bmatrix} \sin. BQN \\ \sin. ACB \\ \sin. \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\text{also } QD = \frac{g}{2 \sin. \alpha}.$$

Ferner ist

$$\begin{Bmatrix} QD : DM \\ 2QD : DB \\ \frac{g}{\sin. \alpha} \end{Bmatrix} = 1 : \begin{Bmatrix} \sin. DQM, \text{ wenn } QMD = R; \\ \sin. DCB \\ \sin. \frac{1}{2}\alpha \end{Bmatrix}$$

Digitized by Google

folglich $g : DB = \sin.\alpha : \sin.\frac{1}{2}\alpha$

$= 2\sin.\frac{1}{2}\alpha . \cos.\frac{1}{2}\alpha : \sin.\frac{1}{2}\alpha$

$= 2\cos.\frac{1}{2}\alpha : 1$

mithin $DB = \frac{g}{2\cos.\frac{1}{2}\alpha}$.

Demnach muß seyn $d < \frac{g}{2\sin.\alpha}$

oder $2d\sin.\alpha < g$;

und $d \gtreqless \begin{cases} \frac{g}{2\cos.\frac{1}{2}\alpha} - \frac{g}{2\sin.\alpha} \\ g\,\frac{\sin.\alpha - \cos.\frac{1}{2}\alpha}{2\sin.\alpha.\cos.\frac{1}{2}\alpha} \\ g\,\frac{2\sin.\frac{1}{2}\alpha . \cos.\frac{1}{2}\alpha - \cos.\frac{1}{2}\alpha}{2\sin.\alpha . \cos.\frac{1}{2}\alpha} \\ g\,\frac{2\sin.\frac{1}{2}\alpha - 1}{2\sin.\alpha} \end{cases}$

somit $2d\sin.\alpha \gtreqless g(2\sin.\frac{1}{2}\alpha - 1)$.

Beweis.

Es ist $2d\sin.\alpha < g$, $2d\sin.\alpha \gtrless g(2\sin.\frac{1}{2}\alpha - 1)$, also erreicht der, aus Q, als Mittelpunkte, mit einem Radius $= d$ beschriebene, Kreis den aus D, als Mittelpunkte, beschriebenen. Und es ist

$$\left.\begin{matrix} OCB \\ DAB \\ DBA \end{matrix}\right\} + OBC \Big\} = \begin{cases} DBO \\ DBA + ABO \end{cases}$$

also $OBC = ABO$.

Auch ist $\left.\begin{matrix}DOA\\OCA\\DBA\\DAB\end{matrix}\right\}+OAC = \left\{\begin{matrix}DAO\\DAB+BAO\end{matrix}\right.$

folglich $OAC=BAO$;

mithin ist O der Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebenen Kreises. Da $QO=d$, $AB=g$, $ACB=\alpha$, so besitzt das Dreieck alle gegebenen Eigenschaften.

Zusatz.

Es erhellet von selbst, daß es im Fall der Berührung der aus D und Q, als Mittelpunkten, mit DB und d, als Radien, beschriebenen Kreise ein einziges Dreieck, im Fall des Schneidens zwei Dreiecke mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Aufgabe 27. (Fig. 45. a. b.)

Innerhalb eines gegebenen Kreises ABC einen anderen Kreis HLM zu beschreiben, so daß, wenn von einem Punkte A des Umfanges jenes Kreises berührende Sehnen AC, AB an diesen gezogen werden, die Verbindungslinie BC der Endpunkte derselben eine Tangente dieses Kreises werde.

Analysis.

Es sey HLM der gesuchte Kreis, und ABC ein, denselben mit seinen Seiten berührendes, Dreieck, so ist, wenn A mit dem Mittelpunkte O dieses Kreises durch die gerade Linie AO verknüpft, und dieselbe bis zum Durchschnitte S des Bogens BSC verlängert wird, auch BS, SC gezogen werden,

Digitized by Google

$$OBS = SBC + CBO$$
$$= SAB + OBA$$
$$= SOB$$

also $BS = SO$

folglich $BS^2 = SO^2$

$BV^2 + VS^2 = ST^2 + TO^2$, wenn von S zum Mittelpunkte D des gegebenen Kreises die gerade Linie SD gezogen, und auf dieselbe das Perpendikel OT gefällt wird;

$= (SV + VT)^2 + TO^2$, wenn SD, BC einander in V schneiden;

$= SV^2 + 2SV.VT + TV^2 +$
$OD^2 - DT^2$
$TV^2 - 2TV.VD + DV^2$

mithin $BV^2 + VD^2 = 2TV(SV + VD) + OD^2$

$BD^2 = 2TV.SD + OD^2$

demnach $BD^2 - \left\{\begin{matrix} 2TV.SD \\ 2OH.SD \\ R^2 - 2R.r \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} OD^2 \\ d^2 \end{matrix}\right.$, wenn die Radien mit R, r bezeichnet werden, OD=d gesetzt wird.

Construction.

Man nehme eine beliebige Linie $d < R$, beschreibe aus D, als Mittelpunkte, einen Kreis mit einem Radius $= d$, bestimme r als die vierte geometrische Proportionallinie

Digitized by Google

zu 2R, R+DO, R—DO, und beſchreibe aus einem beliebigen Punkte O des, mit dem Radius d beſchriebenen, Kreiſes einen Kreis mit einem Radius =r, ſo iſt derſelbe der verlangte.

Beweis.

Es iſt $2R : R+d = R-d : r$

alſo $2Rr = R^2 - d^2$

folglich $R^2 - 2Rr = d^2$

d. i. $BD^2 - \left\{\begin{matrix}2OH.SD\\2VT.SD\end{matrix}\right\} = OD^2$

mithin $BD^2 = 2VT.SD + OD^2$

$BV^2 + VD^2 = 2VT(SV+VD) + OD^2$

ſomit $BV^2 + VS^2 = \left\{\begin{matrix}VS^2 + 2SV.VT + TV^2\\(SV+VT)^2\\ST^2\end{matrix}\right\}$

$BS^2 \quad + \left\{\begin{matrix}OD^2 - \left\{\begin{matrix}(TV^2 - 2TV.VD + VD^2)\\(TV-VD)^2\\DT^2\end{matrix}\right\}\\TO^2\end{matrix}\right\}$

$= SO^2$

demnach $BS = SO$

alſo $OBS = BOS$

$SBC + CBO = \left\{\begin{matrix}SAB\\SCB\\SBC\end{matrix}\right\} + OBA$

folglich $CBO = OBA$;

mithin iſt auch BC eine Tangente.

Digitized by Google

Aufgabe 28. (Fig. 45. a. b.)

Um den kleineren zweyer gegebenen Kreiſe, deren Radien R, r, und Entfernung DO der Mittelpunkte D, O, ſo beſchaffen ſind, daß $R^2 - 2Rr = DO^2$, ein Dreieck in den größeren zu legen, deſſen Höhe der gegebenen geraden Linie h gleich ſey.

Analyſis.

Es ſey ABC das geſuchte Dreieck, ſo iſt, wenn auf die Verlängerung von DO das Perpendikel AG herabgelaſſen, auch die gerade Linie AD gezogen, und auf ſie das Perpendikel OE gefällt wird, OD : DE = AD : DG, d. i. in Fig. a. OD : DA — AE = AD : DG, in Fig. b. OD : EA — AD = AD : DG. Iſt nun AN ein Durchmeſſer, und wird BN gezogen, auch die Höhe AK genommen, ſo iſt ANB = ACB.

Da auch ABN = R
= AKC

ſo iſt BAE = CAK.

Da BAO = CAO

ſo iſt EAO = KAO
= FAO, wenn OF # BC;

alſo FA = AE

folglich in Fig. a. $\left.\begin{array}{l} OD : DA — AF \\ OD : DA — (AK — KF) \\ \text{d. i.} \quad d : R — (h — r) \\ d : R + r — h \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} AD : DG \\ \\ R : DG \end{array}\right.$

in Fig. b. $\left.\begin{array}{l} OD : FA—AD \\ OD : AK—KF—AD \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} AD : DG \\ \\ R : DG \end{array}\right.$

d. i. $\left.\begin{array}{l} d : h—r—R \\ d : h—(R+r) \end{array}\right\}$

$$>$$

mithin ist, es mag $R+r=h$ seyn, DG der Größe nach,

$$<$$

und da sie auch der Lage nach gegeben ist, der Punkt G, die Lage der geraden Linie AG, der Punkt A, somit das Dreieck gegeben.

Construction.

Man construire, wenn $R + r \gtreqless h$, DG so, daß $d : R+r—h=R : DG$ (Fig. a.), oder, wenn $R+r \lesseqgtr h$, so, daß $d : R+r—h=R : DG$, errichte in G auf DG ein Perpendikel, welches den großen Umfang in A erreiche, lege an den kleineren Kreis die Tangenten AB, AC, und ziehe die gerade Linie BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit AG den großen Umfang erreiche, muß

$DG \lesseqgtr DQ$ seyn, wenn DQ ein Radius ist,

also $R : DG \gtreqless R : DQ$

folglich, wenn $R+r \gtreqless h$, $DO : R+r—h \gtreqless R : R$

mithin $DO \gtreqless R+r—h$

somit $h \gtreqless R+r—DO$;

Digitized by Google

und, wenn $R+r \gtrless h$, $DO : h-(R+r) \gtrless R : R$

mithin $DO \gtrless h-(R+r)$

somit $h \lesseqgtr R+r+DO$.

Beweis.

Es ist in Fig. a. $h \gtrless R+r-DO$

demnach $DO \gtrless R+r-h$

also $OD : R+r-h \gtrless R : \begin{cases} R \\ DQ \end{cases}$

$R : DG$

folglich $DG \lesseqgtr DQ$;

Es ist in Fig. b. $h \lesseqgtr R+r+DO$

demnach $DO \gtrless h-(R+r)$

also $DO : h-(R+r) \gtrless R : \begin{cases} R \\ DQ \end{cases}$

$R : DG$

folglich $DG \lesseqgtr DQ$;

mithin erreicht in beiden Fällen GA den größeren Umfang.

Vermöge der Bedingung, daß $R^2-2Rr=OD^2$ ist, nach Aufgabe 27., das Dreieck um den kleineren Kreis beschrieben, so daß $OH=r$, wenn OH perpendikular auf BC gefällt wird.

Ferner ist in Fig. a. $d : R+r-h = R : DG$

$= AD : DG$

$= OD : DE$

$$\text{also } R+r-h=DE$$
$$=DA-\begin{cases}AE\\AF\end{cases}$$
$$=DA-(AK-r)$$

folglich $AK=h$.

Es ist in Fig. b. $d:h-(R+r)=R:DG$
$$=AD:DG$$
$$=OD:DE$$

$$\text{also } h-(R+r)=\begin{cases}DE\\\begin{cases}EA\\FA\end{cases}-AD\\AK-r-AD\end{cases}$$

folglich $h=AK$.

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, daß es ein Dreieck, oder zwey Dreiecke giebt, je nachdem $DG \gtreqless DQ$.

Zusatz 2.

$$\text{Es ist } h \geqq \begin{cases}R+r-DO \text{ (Fig. a.)}\\QD+OU-OD\\QU,\end{cases}$$

also ist QU der kleinste Werth, welchen h annehmen darf, und das Dreieck, dessen Spitze in Q liegt, hat eine kleinere Höhe, als alle übrigen.

Zusatz 3.

DG nimmt ab, wenn h wächst. Die Dreiecke, deren

Digitized by Google

Spitzen näher bei Q liegen, als andere, haben größere Höhen.

Zusatz 4.

$$\text{Es ist } h \leqq \begin{cases} R+r+DO \text{ (Fig. b.)} \\ DQ+OU+DO \\ QU, \end{cases}$$

also ist QU der größte Werth, welchen h annehmen darf. Und ein Dreieck, dessen Spitze in Q liegt, hat eine größere Höhe, als jedes andere. Auch hat dasjenige, dessen Spitze näher bey Q liegt, als die eines anderen, die größere Höhe.

Anmerkung 1.

Vorstehende Aufgabe ist eine von den seltenen, in welchen man eine Folgerung der Analysis nicht umkehren kann. Man gelangt in dem Beweise auf dem umgekehrten Wege der Analysis nur bis zu der Gleichung

$$R+r-h=DA-AF, \quad \text{oder} \quad h-(R+r)\begin{cases} =AF-AD \\ =R-(AK-KF), \end{cases} \quad h-R-r \begin{cases} =AK-KF-R, \end{cases}$$

und sie bietet keine Mittel dar, zu beweisen, daß KF=r, oder AK=h sey. Es ist deßhalb vorher in Aufgabe 27. untersucht worden, unter welchen Bedingungen man KF=r setzen könnte. Bey der folgenden verwandten Aufgabe soll das Ganze in die Behandlung der Aufgabe selbst, wie sich eigentlich gehört, gelegt werden.

Anmerkung 2.

Eine andere Analysis derselben Aufgabe findet sich in den geometrischen Aufgaben von Diesterweg, Elberfeld 1823, Seite 124 ff.

Digitized by Google

Aufgabe 29. (Fig. 46.)

In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Höhe der gegebenen geraden Linie h gleich sey, und von dessen Seiten ein gegebener Kreis die eine zwischen ihren Endpunkten, die andere in ihren Verlängerungen berühre.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist, wenn die Mittelpunkte der Kreise durch D, O bezeichnet werden, auf die gerade Linie DO das Perpendikel AG, auf die gerade Linie DA das Perpendikel OE gefällt wird,

$$\left.\begin{matrix} OD : DE \\ OD : DA+AE \end{matrix}\right\} = AD : DG.$$

Ist nun AN ein Durchmesser, und wird die gerade Linie BN gezogen, auch die Höhe AK genommen, so ist

$$ANB = ACB.$$

Da auch $ABN = R$

$$= AKC$$

$$\left.\begin{matrix} \text{so ist } BAN \\ EAL \end{matrix}\right\} = CAK.$$

$$\text{Es ist } LAO = OAC$$

$$\left.\begin{matrix} \text{also } EAL+LAO \\ EAO \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} CAK+OAC \\ KAO \end{matrix}\right.$$

$$= FAO, \text{ wenn } OF \# BC;$$

folglich $FA = AE$

$$\text{mithin } OD : DA+\left\{\begin{matrix} AF \\ AK-KF \\ h-OH \end{matrix}\right\} = AD : DG.$$

Digitized by Google

Da OD, DA, h, OH gegeben sind, so ist DG der Größe nach gegeben, und da OD auch der Lage nach gegeben ist, so ist der Punkt G, die Lage der geraden Linie AG, der Punkt A, somit das Dreieck ABC gegeben.

Construction.

Man construire DG so, daß OD : DA + h — OH = AD : DG, errichte in D auf DG ein Perpendikel, welches den Umfang des um D, als Mittelpunkt, beschriebenen Kreises in A erreiche, lege an den anderen Kreis die Tangenten AC, AB, und ziehe die gerade Linie BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit von A zwey Tangenten an den anderen Kreis gezogen werden können, muß, wenn Q den Durchschnitt der Linie DO mit der gemeinschaftlichen Chorde beider Kreise bezeichnet, seyn

$$DG < DQ$$

also $\left.\begin{matrix} AD : DG \\ OD : AD + h - OH \end{matrix}\right\rangle > AD : DQ.$

Damit BC eine Tangente des anderen Kreises werde, muß OBA = OBC werden. Verlängert man OA bis zum Durchschnitte S des einen Kreises, so ist

$$\begin{aligned} CBS &= CAO \\ &= OAL \\ &= BAS \end{aligned}$$

folglich $\left.\begin{matrix} CBS - OBC \\ OBS \end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} BAS - OBA \\ SOB \end{matrix}\right.$

Digitized by Google

mithin BS=SO

somit $BS^2 = SO^2$

$BV^2+VS^2 = ST^2+TO^2$, wenn OT#BC;

$=(SV-VT)^2+OD^2-DT^2$

$=SV^2-2SV.VT+VT^2+OD^2$

$-(TV-VD)^2$

$TV^2-2TV.VD+VD^2$

demnach $BV^2+VD^2 = OD^2-2TV(SV-VD)$

$BD^2 = OD^2-2TV.SD$

also $BD^2+2TV.SD = OD^2$

$2OH.SD$

d. i. $R^2+2Rr=d^2$, wenn die Radien mit R, r bezeichnet werden, OD=d gesetzt wird.

Beweis.

Es ist $d : R+h-r > R : DQ$

$R : DG$

also DG<DQ;

mithin erreicht GA den Kreis, dessen Mittelpunkt D ist, so daß die Tangente AC an den anderen Kreis gezogen werden kann.

Ferner ist $R^2+2Rr=d^2$ (Det.)

d. i. $BD^2+2OH.SD = OD^2$

$2TV.SD$

folglich $BD^2 = OD^2-2TV.SD$

$BV^2+VD^2 \qquad 2TV(SV-VD)$

Digitized by Google

$$\text{somit } BV^2+VS^2 \left\{ \begin{array}{l} =SV^2-2SV.VT+VT^2+OD^2 \\ \quad -VT^2+2TV.VD-VD^2 \end{array} \right.$$

$$BS^2 \left\{ \begin{array}{l} =(SV-VT)^2+OD^2-(TV-VD)^2 \\ =ST^2+\left\{ \begin{array}{l} OD^2-DT^2 \\ TO^2 \end{array} \right. \\ =SO^2 \end{array} \right.$$

demnach $BS=SO$

$$\text{also } \begin{array}{l} OBS \\ CBS-CBO \end{array} \left\{ \begin{array}{l} = \\ \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} SOB \\ BAS-ABO \end{array} \right.$$

folglich $CBO=ABO$;
mithin ist BC eine Tangente.

Auch ist $d : R+h-r=R : DG$
$=AD : DG$
$=OD : DE$, wenn OE perpendikular auf DA;

mithin $R+h-r=DE$

$$= \left\{ \begin{array}{l} DA \\ R \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} AE \\ AF \\ AK-\left\{ \begin{array}{l} KF \\ OH \\ r \end{array} \right. \end{array} \right.$$

demnach $h=AK$.

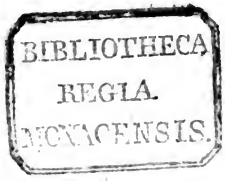
Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, daß es wegen der beiden Durchschnittspunkte der Linie GA mit dem einen Kreise zwey Dreiecke mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Digitized by Google

Zusatz 2.

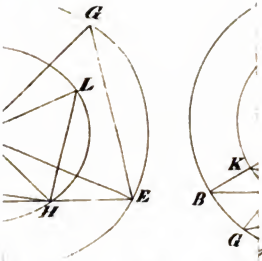
Je größer h, desto größer DG. Die dem Durchschnittspunkte beider Kreise näher liegenden Punkte des zu dem Punkte D gehörigen Kreisumfanges bestimmen Dreiecke mit größeren Höhen, als die entfernteren.



Gedruckt bei Carl Georgi in Bonn.

Digitized by Google

Tafel 1.



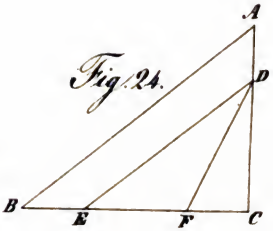


Fig. 24.

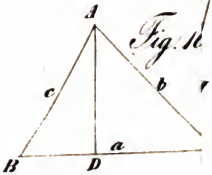
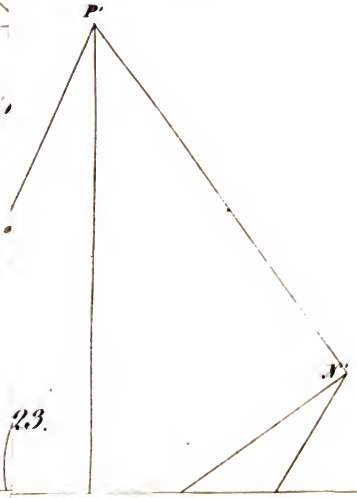


Fig. 1

Fig.



Digitized by Google

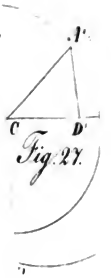
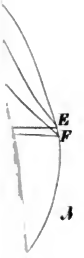
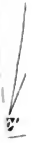


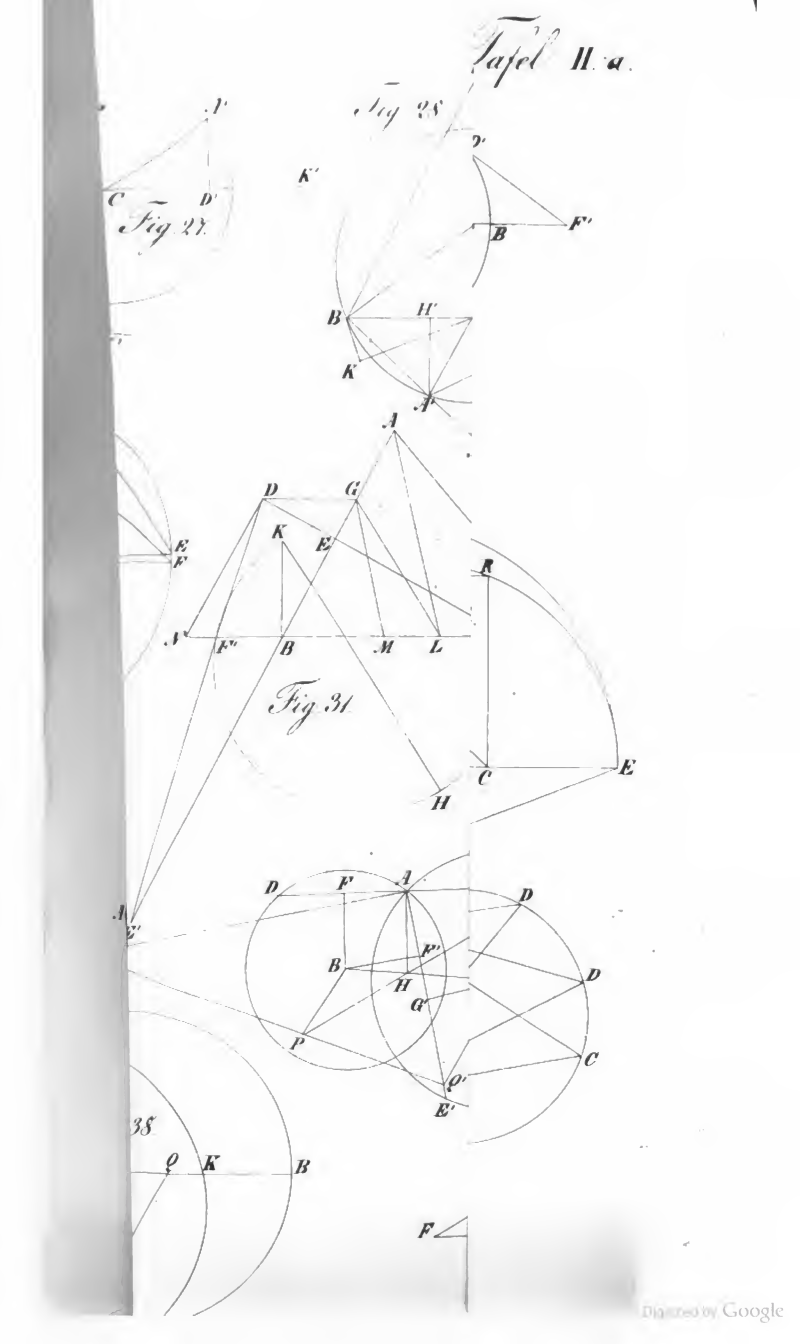
Fig. 27.





Digitized by Google

Tafel II. a.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google